常微分方程学习笔记

杨毅涵

November 25, 2024

Contents

Chapter 1

初等积分法

1.1 恰当方程

定义 1.1 称形如

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.1}$$

的式子为一阶常微分方程的对称形式.

定义 1.2 如果存在一个连续可微函数 $\Phi(x)$ 使得

$$\mathrm{d}\Phi(x) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

则称方程 *1.1* 为恰当方程.

遇到一个微分方程的时候，我们通常需要判断是否是一个恰当方程，下面的定理给出了回答.

定理 1.1 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在单联通区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，且具有连续的一阶偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则方程 *1.1* 是恰当方程的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.2}$$

在 D 内成立，且当上式成立时，对于 (x_0,y_0)，$(x,y) \in D$，方程 *1.1* 的通积

分为

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = c \tag{1.3}$$

其中 γ 是任意连接 (x_0,y_0) 与 (x,y) 的由有限多段光滑曲线组成的曲线，c 为常数.

证明: 充分性利用 Green 公式即可，必要性直接验证. □

注 1.1 当单联通区域为矩形区域时，我们可以取 *(1.3)* 中的积分为

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,\mathrm{d}s \tag{1.4}$$

或者

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,\mathrm{d}s \tag{1.5}$$

笔记 1.1 建议初学者按下面方式寻找通积分：由条件可知

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y)$$

从而

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,\mathrm{d}t + \phi(y)$$

再由

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,\mathrm{d}t + \phi'(y) = Q(x,y)$$

利用条件 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得到[1]

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)\,\mathrm{d}t + \phi'(y) = Q(x,y)$$

由此可知

$$\phi'(y) = Q(x_0,y)$$

因此可以选择

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,\mathrm{d}s$$

[1]这里用到了一个结论：积分与微分符号换序需要偏导数连续.

于是

$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)\,\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,s)\,\mathrm{d}s$$

笔记 1.2 上面用到的结论如下：若函数 $f(x,y)$ 与其偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 都在矩形区域上连续，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{y_0}^{y}f(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

证明如下: 令 $\varphi(x)=\displaystyle\int_{y_0}^{y}f(x,t)\,\mathrm{d}t$，则

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\int_{y_0}^{y}\frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x}\,\mathrm{d}t$$

由拉格朗日定理与 f_x 在矩形区域上连续(由于闭，所以一致连续)，知道存在 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|\Delta x|<\delta$，就有

$$\left|\frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x}-f_x(x,t)\right|=|f_x(x+\theta\Delta x,t)-f_x(x,t)|<\varepsilon$$

其中 $\theta\in(0,1)$，因此

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}-\int_{y_0}^{y}f_x(x,t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_{y_0}^{y}\left|\frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x}-f_x(x,t)\right|\,\mathrm{d}t<\varepsilon|y-y_0|$$

由定义我们知道

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{y_0}^{y}f(x,t)\,\mathrm{d}t=\varphi'(x)=\int_{y_0}^{y}f_x(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

注 1.2 考虑一阶微分形式

$$\omega^1=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

我们知道在 $\mathbb{R}^2$ 上，一阶微分形式是恰当的当且仅当它是闭的.

1.2 变量分离方程

当方程 1.1 不是恰当方程时，我们下面想办法通过变换将其转化为一个恰当方程来求解.

定义 1.3 如果方程 1.1 中的函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 均可以写成

$$P(x,y)=P_1(x)P_2(y),\quad Q(x,y)=Q_1(x)Q_2(y)$$

则称方程 1.1 是**变量分离方程**.

当方程是变量分离方程的时候，可以写成

$$P_1(x)P_2(y)\,\mathrm{d}x+Q_1(x)Q_2(y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{1.6}$$

一般来说，1.6 不是恰当方程，但是我们发现

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,\mathrm{d}x+\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,\mathrm{d}y=0 \tag{1.7}$$

是恰当方程，因为 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}=0=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{Q_2(y)}{P_2(y)}$.

容易看出当 $P_2(y)Q_1(x)=\neq 0$ 的时候，方程 1.6 与方程 1.7 是同解的.

假设 $P_2(b_i)=0(i=1,2,\cdots,m)$，直接观察方程可知有解

$$y\equiv b_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

而当 $Q_1(a_j)=0(j=1,2,\cdots,n)$，有解.

由上面的讨论，我们有

定理 1.2 方程 1.6 的所有解为

$$\int_{x_0}^{x}\frac{P_1(t)}{Q_1(t)}\,\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\frac{Q_2(s)}{P_2(s)}\,\mathrm{d}s=c \tag{1.8}$$

和

$$y\equiv b_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$
$$x\equiv a_j,\quad j=1,2,\cdots,n$$

其中 $P_2(b_i)=0(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $Q_1(a_j)=0(j=1,2,\cdots,n)$，$c$ 为任意常数.

例 1.1 函数 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，即

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

若 $M(x,y),N(x,y)$ 均为 n 次齐次函数，则称

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

为 n 次齐次方程.

解: 作变量替换 $y=ux$，则有

$$M(x,ux)\,\mathrm{d}x+N(x,ux)\,\mathrm{d}y=0$$

其中 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}(ux)=u\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}u$，利用齐次函数定义可知

$$x^n\left(M(1,u)+uN(1,u)\right)\,\mathrm{d}x+x^{n+1}N(1,u)\,\mathrm{d}u=0$$

为一个变量分离方程，然后按照变量分离方程即可解. $\square$

例 1.2 称函数 $f(x,y)$ 是 d 次拟齐次函数，如果

$$f(t^{\alpha s}x,t^{\beta s}y)=t^{ds}f(x,y)$$

其中 $t>0$，α,β 为正常数，$\alpha+\beta=1$，$s\in\mathbb{R}$. 如果 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 分别为 d_0 次与 d_1 次拟齐次函数，x,y 的权分别是 α,β，证明当

$$d_0=d_1+\beta-\alpha$$

时，该方程可以用初等积分法求解.

证明: 作换元，令 $y=ux^{\frac{\beta}{\alpha}}$，则有

$$P(x,y)=P\left((x^{\frac{1}{\alpha s}})^{\alpha s},u(x^{\frac{1}{\alpha s}})^{\beta s}\right)=\left(x^{\frac{1}{\alpha s}}\right)^{d_0 s}P(1,u)$$

同理有

$$Q(x,y)=\left(x^{\frac{1}{\alpha s}}\right)^{d_1 s}Q(1,u)$$

由于 $\mathrm{d}y=\dfrac{\beta}{\alpha}u\,\mathrm{d}x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}+x^{\frac{\beta}{\alpha}}\,\mathrm{d}u$，代入原式化简即分离. $\square$

1.3 一阶线性微分方程

定义 1.4 考虑一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \tag{1.9}$$

当 $q(x)\equiv 0$ 时，称为一阶齐次线性微分方程，当 $q(x)$ 不恒为零的时候，称为一阶非齐次线性微分方程.

我们首先研究 $q(x)\equiv 0$ 的情况，写成对称形式有

$$p(x)y\ \mathrm{d}x+\ \mathrm{d}y=0$$

分离变量有

$$p(x)\ \mathrm{d}x+\frac{1}{y}\ \mathrm{d}y=0$$

即通积分为

$$\ln|y|+\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t=c$$

整理后为

$$y=c_1e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t}$$

其中 $c_1\neq 0$，包含了所有 y 不恒为 0 的解，如果允许 $c_1=0$，则包含了所有解，即所有解为

$$y=ce^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t}$$

对于 $q(x)$ 不恒为零的情况，我们无法这么操作，但是我们愿意相信他们具有相似的结构，所以我们令上式中的 c 变为一个关于 x 的函数(此即**常数变易法**)，即

$$y=c(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t}$$

为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 的解，即

$$y'=c'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t}-c(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t}p(x)$$

整理得

$$y'+p(x)y=c'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t}$$

对比即 $q(x)=c'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\ \mathrm{d}t}$，从而解得

$$c(x)=\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\ \mathrm{d}t}q(s)\ \mathrm{d}s+c$$

所以即有

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t} q(s)\,\mathrm{d}s + c\right)$$

笔记 1.3 ★

- 一阶齐次线性微分方程的解或者恒为零，或者恒不为零.
- 一阶齐次线性微分方程的任意两个解之和还是它的解，任意一个解乘以一个常数之后还是它的解.
- 方程 1.9 的解是整体存在的，即该方程的任意一个解的存在区间与 $p(x), q(x)$ 的定义的共同区间是一样的.
- 方程 1.9 的一个特解与它对应的齐次方程的通解之和构成方程的通解.
- 方程 1.9 的初值问题的解是存在且唯一的.
- 齐次线性微分方程的解构成一个一维线性空间，它的基为 $e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}$.

例 1.3 设函数 $f(x) \in C^1[0, +\infty)$，$a(x)$ 连续，且存在常数 $c_0 > 0$，使得 $a(x) \geq c_0$，且有

$$\lim_{x\to+\infty} (f'(x) + a(x)f(x)) = 0$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明： 设 $q(x) = f'(x) + a(x)f(x)$，则我们知道

$$f(x) = \frac{f(0) + \int_0^x e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s} q(t)\,\mathrm{d}t}{e^{\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t}}$$

由于 $a(x) \geq c_0$，故

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t} = +\infty$$

则由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t} q(x)}{a(x)e^{\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{q(x)}{a(x)} = 0$$

□

例 1.4 证明：若存在 $\mathbb{R}$ 上的连续可微且有界的函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x)+f'(x)|\leq 1$$

则 $|f(x)|\leq 1$.

证明: 设 $g(x)=e^x f(x)$，则有

$$|g'(x)|\leq e^x$$

故有

$$-e^x\leq g'(x)\leq e^x$$

从而有

$$\int_{-\infty}^{x} g'(x)-e^x\ \mathrm{d}x\leq 0$$

由于 $f(x)$ 有界，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x f(x)-e^x=0$ 即

$$g(x)-e^x\leq 0$$

同理有

$$g(x)+e^x\geq 0$$

即

$$|g(x)|\leq e^x$$

即

$$|f(x)|\leq 1$$

□

1.4 积分因子

在本节中，我们将对某些特殊形式的方程寻找如何寻找可微函数 $\mu(x,y)$，使得方程

$$\mu(x,y)P(x,y)\ \mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\ \mathrm{d}y=0 \tag{1.10}$$

变成恰当方程，即存在 $\Phi(x,y)$ 满足

$$\mu(x,y)P(x,y)\ \mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\ \mathrm{d}y=\ \mathrm{d}\Phi(x,y)$$

如果这样的 μ 存在，且 Φ 光滑，则

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{1.11}$$

此时，称 $\mu(x,y)$ 是方程 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$ 的一个**积分因子**.
从 1.11 可知，寻找可微函数 μ 等价于解偏微分方程

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu \tag{1.12}$$

但这个方程一般是解不出来的，但是对于一些特殊情况，我们可以求解.

定理 1.3 ★

- *偏微分方程 1.12 有一个只依赖于 x 的解 $\mu(x)$ 的充要条件是，下面定义的函数 G 只依赖于 x:*

$$G=-\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q(x,y)}$$

此时，有

$$\mu(x)=e^{\int_{x_0}^{x}G(t)\,\mathrm{d}t}$$

- *偏微分方程 1.12 有一个只依赖于 y 的解 $\mu(y)$ 的充要条件是，下面定义的函数 H 只依赖于 y:*

$$H=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P(x,y)}$$

此时，有

$$\mu(y)=e^{\int_{y_0}^{y}H(s)\,\mathrm{d}s}$$

证明: 两个方向代入验证即可. □

例 1.5 求 n 次齐次方程

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

的积分因子.

引理 1.1 (Euler 定理) 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可微，则为 n 次齐次函数的充分必要条件为

$$x_1 f_x + \cdots + x_n f_{x_n} = n f(x_1,\cdots,x_n)$$

证明： 引理的证明：

必要性：

$$f(tx_1,\cdots,tx_n) = t^n f(x_1,\cdots,x_n)$$

两边同时对 t 求导

$$x_1 f_{tx_1} + \cdots + x_n f_{tx_n} = n t^{n-1} f(x_1,\cdots,x_n)$$

两边同时乘 t 得到

$$tx_1 f_{tx_1} + \cdots + tx_n f_{tx_n} = n t^n f(x_1,\cdots,x_n) = n f(tx_1,\cdots,tx_n)$$

再换元把 tx_1 看做 x_1 得

$$x_1 f_x + \cdots + x_n f_{x_n} = n f(x_1,\cdots,x_n)$$

充分性：略

□

解： 积分因子为

$$\frac{1}{xM + yN}$$

代入验证即可. □

定理 1.4 若 $\mu(x,y)$ 为 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ 的积分因子，使得存在 Φ，有

$$\mathrm{d}\Phi = \mu P \mathrm{d}x + \mu Q \mathrm{d}y$$

则 $\mu(x,y)\cdot g(\Phi(x,y))$ 也是积分因子，其中 $g \neq 0$，可微.

证明： 注意到令 $G(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$，有

$$\mu g(\Phi)[P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y] = g(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}G(\Phi)$$

□

我们可以通过分组的方式求积分因子：对于下面这个方程

$$\underbrace{(P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y)}_{(A)}+\underbrace{(P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}x)}_{(B)}=0$$

有 $(A),(B)$ 的积分因子与通积分为 $\mu_1,\Phi_1;\ \mu_2,\Phi_2$，则我们需要寻找 g_1,g_2 使得

$$\mu=\mu_1(x,y)g_1(\Phi_1)=\mu_2(x,y)g_2(\Phi_2)$$

从而我们知道这个 μ 为公共的积分因子.

例 1.6 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0(\bigstar)$ 有两个积分因子 μ_1,μ_2，如果 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ 不恒为常数，则 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=C$ 为 $(\bigstar)$ 的通解，$C\in\mathbb{R}$.

证明: 有

$$\begin{cases}\mu_1(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)= & \mathrm{d}\Phi_1\\ \mu_2(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)= & \mathrm{d}\Phi_2\end{cases}$$

有

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}=\mu_1\mu_2(PQ-PQ)=0$$

所以函数相关，即存在 g，使得

$$\Phi_1=g(\Phi_2)$$

从而

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\Phi_2}=\frac{g'(\Phi_2)\,\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\Phi_2}=g'(\Phi_2)=g'(C_2)=C$$

□

Chapter 2

解的存在性与唯一性

2.1 预备知识

引理 2.1 (Gronwall 不等式) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x) \geq 0$，c 是一个常数，如果

$$f(x) \leq c + \int_a^x g(s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

则

$$f(x) \leq ce^{\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s}$$

证明： 令

$$\Phi(x) = \int_a^x g(s)f(s)\mathrm{d}s$$

则由已知条件可知

$$\Phi'(x) = g(x)f(x) \leq g(x)(c + \Phi(x))$$

即

$$\Phi'(x) - g(x)\Phi(x) \leq cg(x)$$

两段乘 $e^{-\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}$ 并积分，有

$$e^{-\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}\Phi(x) - e^{-\int_a^a g(s)\mathrm{d}s}\Phi(a) \leq \int_a^x cg(s)e^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

注意到 $\Phi(a)=0$，从而有

$$\Phi(x)\le c\left(e^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}-1\right)$$

即

$$f(x)\le c+\Phi(x)\le ce^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}$$

□

定义 2.1 设 Λ 是一个无限集合，集合 $I\subseteq\mathbb{R}$，称定义在 I 上的函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在 I 上是**一致有界**的，如果存在一个常数 $M>0$ 使得

$$|f_\alpha(x)|\le M,\quad \forall\alpha\in\Lambda,\forall x\in I$$

定义 2.2 设 Λ 是一个无限集合，集合 $I\subseteq\mathbb{R}$，称定义在 I 上的函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在 I 上是**等度连续**的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于任意的 $x,y\in I$，$|x-y|<\delta$ 和任意的 α，有

$$|f_\alpha(x)-f_\alpha(y)|<\varepsilon$$

引理 2.2 设 Λ 是一个可数集，如果函数列 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在集合 $E\subset\mathbb{R}$ 上一致有界，则对于任意的可数点列 $\{x_m\}\subset E$，存在该函数列的一个子列 $\{f_{\alpha_k}\}$ 使得数列 $\{f_{\alpha_k}(x_m)\}$ 是收敛的(即对于每个 m 都有 $\lim\limits_{k\to+\infty}f_{\alpha_k}(x_m)$ 收敛).

证明: 利用对角线法构造即可. □

引理 2.3 设函数列 $\{f_n\}$ 在紧集 $E\subseteq\mathbb{R}$ 上是等度连续的，且存在 E 的一个稠密子集 E_0，使得 $\{f_n\}$ 在该子集上是收敛的，则 $\{f_n\}$ 在 E 上是一致收敛[a]的.

[a]在数学分析中，一致收敛是一个重要的概念。它描述了一个函数序列如何趋近于一个极限函数. 具体来说，函数序列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛到函数 f 如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对所有 $x\in I$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

形式化地说，给定一个函数序列 $\{f_n\}$，其中每个 f_n 都是从某个集合 I 映射到实数集（或复数集）的函数，如果存在一个函数 $f:I\to\mathbb{R}$（或 $f:I\to\mathbb{C}$），使得对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 N 满足对所有的 $n>N$ 和所有 $x\in I$，

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称函数序列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f.

一致收敛的一个关键点是，对于给定的 ε，这个 N 不依赖于 x；也就是说，一旦 $n > N$，不论 x 取何值，$f_n(x)$ 与 $f(x)$ 的差异都会小于 ε. 这与逐点收敛不同，在逐点收敛的情况下，对于每一个固定的 x，N 可能会不同.

一致收敛比逐点收敛更强，因为它保证了整个区间上的收敛速度是一致的。这对于很多分析中的应用是非常有用的，比如交换极限运算符的位置(积分与求极限、导数与求极限等).

证明: 根据 Cauchy 收敛原理，我们只需要证明对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得对于任意的 $n, m > N$，$x \in E$，有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

注意到

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f_m(y) + f_m(y) - f_m(x)|$$

利用条件放缩

$$|f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)|$$

即可. □

定理 2.1 (Ascoli-Arzelà 引理) 设 Λ 是一个可数集，如果函数列 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致有界且等度连续，则一定存在该函数列的一个在 $[a,b]$ 上一致收敛的子序列 $\{f_{\alpha_k}\}$.

证明: 注意到 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧集，且 $Q \cap [a,b]$ 是 $[a,b]$ 上稠密的集合，从而由引理 2.2 可知存在 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的一个在 $Q \cap [a,b]$ 上收敛的子序列，再由引理 2.3 可知，子序列在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

2.2 Picard 定理

定义 2.3 称函数 $f(x,y)$ 在区域 G 上对 y 满足 ***Lipschitz*** **条件**，如果存在常数 L，对于任意的 $(x,y_1),(x,y_2) \in G$，有

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

定理 2.2 (Picard定理) 假设 $f(x,y)$ 在矩形闭区域

$$D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$$

上连续且对 y 满足 *Lipschitz* 条件，则微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的解在区间 $|x-x_0|\le h$ 上存在且唯一，其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\quad M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$$

证明:

Step 1: 该问题与

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

等价，两边验证即可.

Step 2: 构造 Picard 序列:

令 $y_0(x)=y_0$，定义

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s,\quad |x-x_0|\le h$$

用归纳法可以验证，当 $|x-x_0|\le h$ 时，有 $|y_n(x)-y_0|\le b$.

这样我们就连续地定义了一个 Picard 序列.

Step 3: 我们证明解的存在性，即证明 Picard 序列在区间上一致收敛到方程的解，由于

$$|y_1(x)-y_0(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}f(s,y_0(s))\mathrm{d}s\right|\le M|x-x_0|$$

$$\begin{aligned}|y_2(x)-y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}(f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s)))\mathrm{d}s\right| \\ &\le L\int_{x_0}^{x}|y_1(s)-y_0(s)|\mathrm{d}s\le\frac{LM}{2}|x-x_0|^2\end{aligned}$$

从而利用数学归纳法可以证明

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{M}{L}\cdot\frac{L^n}{n!}|x-x_0|^n$$

注意到数项级数

$$Mh + \frac{ML}{2!}h^2 + \cdot + \frac{ML^{n-1}}{n!}h^n + \cdots$$

收敛，从而 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $|x-x_0| \le h$ 上一致收敛[1]. 假设其一致收敛到 $\phi(x)$，由于 $y_x(x)$ 是连续的，因此 $\phi(x)$ 在区间 $|x-x_0| \le h$ 上连续.

在等式

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\mathrm{d}s, \quad |x-x_0| \le h$$

两边令 $n \to \infty$ 得到[2]

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))\mathrm{d}s, \quad |x-x_0| \le h$$

这就证明了 $y = \phi(x)$ 是方程的解.

---

[1]**Weierstrass 判别法(M-Test)**：如果对于每一个 n，存在非负常数 M_n，使得对于所有的 $x \in I$ 都有 $|f_n(x)| \le M_n$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

[2]我们讨论一致连续函数复合一致收敛的函数列可以交换积分与极限的顺序.

复合函数的一致收敛性

当我们考虑一致连续函数 $g(x)$ 与一致收敛函数列 $\{f_n(x)\}$ 的复合 $g(f_n(x))$，如果 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛到 $f(x)$，那么在一致连续性的作用下，$g(f_n(x))$ 也将一致收敛到 $g(f(x))$. 这是因为一致连续性保证了当输入 $f_n(x)$ 接近 $f(x)$ 时，$g(f_n(x))$ 也接近 $g(f(x))$，而且这种接近是均匀的.

积分与极限的交换

在上述条件下，我们可以证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(f_n(x))\,dx = \int_a^b g(f(x))\,dx$$

给定 $\epsilon > 0$，由于 $g(x)$ 是一致连续的，存在一个 $\delta > 0$，使得对于所有的 y_1, y_2，只要 $|y_1 - y_2| < \delta$，就有 $|g(y_1) - g(y_2)| < \epsilon$.

又因为 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$，存在一个正整数 N，使得对于所有 $n > N$ 和所有的 $x \in [a,b]$，有 $|f_n(x) - f(x)| < \delta$.

这样，对于 $n > N$，对于所有的 $x \in [a,b]$，我们有 $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon$. 因此，

$$\left| \int_a^b g(f_n(x))\,dx - \int_a^b g(f(x))\,dx \right| = \left| \int_a^b (g(f_n(x)) - g(f(x)))\,dx \right|$$

由 $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon$，我们可以得到：

$$\left| \int_a^b (g(f_n(x)) - g(f(x)))\,dx \right| < \epsilon(b-a)$$

由于 ϵ 是任意的，我们可以让其无限接近零，从而得到：

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(f_n(x))\,dx = \int_a^b g(f(x))\,dx$$

因此，在一致连续函数复合一致收敛的函数列的情况下，我们可以交换积分与极限的顺序.

Step 4: 证明解的唯一性.

设 $y=\phi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 都是解，从而我们有

$$|\phi(x)-\psi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}(f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s)))\mathrm{d}s\right|\le L\left|\int_{x_0}^{x}|\phi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}s\right|$$

令 $\Phi(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}|\phi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}s$，则

$$\Phi(x)\ge 0, x\ge x_0;\quad \Phi(x)\le 0, x\le x_0$$

于是当 $x\ge x_0$ 时有

$$\Phi'(x)\le L\Phi(x)$$

使用 Gronwall 不等式可知

$$\Phi(x)\le 0, x\ge x_0$$

从而我们知道 $\Phi(x)=0, x\ge x_0$，同理可证另一边，从而我们知道

$$\Phi(x)\equiv 0\iff \phi(x)=\psi(x)$$

从而我们完成了证明. □

引理 2.4 对于 *Cauchy* 问题，我们可以对收敛速度有估计，当 $|x-x_0|\le h$，有

$$|y_n(x)-\phi(x)|\le\frac{ML^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

证明: 利用归纳法易证. □

2.3 Peano 定理

定理 2.3 (Peano定理) 假设 $f(x,y)$ 在矩形闭区域

$$D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$$

上连续，则微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

在区间 $|x - x_0| \le h$ 上至少存在一个解，其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$$

证明: 等价于解下面的积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\mathrm{d}s, \quad |x - x_0| \le h$$

我们只考虑在 $0 < x - x_0 \le h$ 上的解(称为**右侧解**)的存在性，对于另一边同理可处理.

证明的想法是构造 Euler 折线[3]，逼近，再利用 Ascoli-Arzel*à* 引理证明存在一致收敛的子列，继而可以证明存在性. □

[3]常微分方程的Euler折线（也称为Euler多边形逼近或Euler方法）是一种数值方法，用于近似求解常微分方程（ODE）的初值问题. 这种方法基于Euler方法的基本思想，通过构造一系列线段来逼近原问题的真实解. 这些线段连接起来形成一条折线，这就是所谓的Euler折线.

它通过以下方式来逼近 $y(t)$ 在 t 的下一个节点 t_{n+1} 的值：

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

这里的 h 是步长，$t_{n+1} = t_n + h$.

Euler折线的构造: 给定初始条件 $y(t_0) = y_0$，Euler折线的构造如下：

1. 确定步长和区间：选择一个步长 $h > 0$，并确定求解的区间 $[t_0, T]$.
2. 计算节点：计算一系列节点 $t_n = t_0 + nh$，其中 $n = 0, 1, 2, \ldots, N$，直到 T.
3. 构造折线：在每个节点 t_n，使用Euler公式来估算 $y(t_n)$ 的值 y_n：

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

4. 连接节点：连接相邻节点 (t_n, y_n) 和 (t_{n+1}, y_{n+1})，形成一系列线段，这些线段构成Euler折线.

Euler折线的特点

- **简单性**：Euler方法是最简单的数值方法之一，易于理解和实现.
- **局部线性逼近**：在每个时间步，Euler方法通过直线段来近似解曲线.
- **误差**：尽管简单，但是Euler方法的误差较大，尤其是在步长较大时. 它的局部截断误差为 $O(h^2)$，累积误差为 $O(h)$.

注 2.1 实际上，我们还可以利用 *Tonelli* 序列来证明 *Peano* 定理，*Tonelli* 序列是比 *Euler* 折线逼近程度更高的方法.

例 2.1 沿用前面的符号，在区间 $I=[x_0,x_0+h]$，*(*h 的含义与 *Picard* 定理中的相同*)*构造序列 $y_n(x)$ 如下：

- 对于正整数 n，将区间 I 等分，其分点为

$$x_k=x_0+kd_n,\quad d_n=\frac{h}{n},\quad k=1,2,\cdots,n$$

- 定义 $y_n(x)=\begin{cases} y_0, & x\in[x_0,x_1] \\ y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x-d_n} f(s,y_n(s))\mathrm{d}s, & x\in[x_1,x_0+h]\end{cases}.$

称序列 $\{y_n(x)\}$ 为 *Tonelli* 序列.

(1) 使用 *Tonelli* 序列证明 *Peano* 定理.

(2) 使用 *Tonelli* 序列证明 *Picard* 定理.

证明： (1) 我们将证明分几步进行：

Step 1: 证明 $|y_n(x)-y_0|\le b$，即 $\{y_n(x)\}$ 定义在所给的矩形区域中，是合理的.

考虑到对于 $x\in[x_1,x_0+h]$，有

$$|y_n(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x-d_n} f(s,y_n(s))\mathrm{d}s\right|\le M(x-d_n-x_0)<Mh\le b$$

所以我们证明了 $y_n(x)$ 在所给矩形区域中.

Step 2: 由前一步的证明，我们知道 $\{y_n(x)\}$ 是一致有界的.

Step 3: 证明 $y_n(x)$ 是等度连续的.

考虑对 $s,t\in[x_1,x_0+h]$，有

$$|y_n(s)-y_n(t)|=\left|\int_{s-d_n}^{t-d_n} f(u,y_n(u))\ \mathrm{d}u\right|\le M|s-t|$$

所以我们证明了 $\{y_n\}$ 是等度连续的.

Step 4: 我们说明满足下式的 δ_n 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n(x)=0,\forall x\in[x_0,x_0+h]$，

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_n(s))\mathrm{d}s+\delta_n(x)$$

实际上，我们由 y_n 的定义得到

$$\delta_n(x) = \begin{cases} -(x-x_0)y_0, & x \in [x_0, x_1] \\ -\displaystyle\int_{x-d_n}^{x} f(s, y_n(s))\mathrm{d}s, & x \in [x_1, x_0+h] \end{cases}$$

所以有

$$|\delta_n(x)| \le \max\{d_n|y_0|, Md_n\} = \max\{\frac{|y_0|h}{n}, \frac{Mh}{n}\} \to 0(n \to +\infty)$$

从而我们知道 $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n(x) = 0$.

Step 5: 我们证明 Peano 定理，即解的存在性. 由 Ascoli-Arzelà 引理我们知道存在一致收敛子列 $\{y_{n_k}\}$，设 y_{n_k} 一致收敛到 $\phi(x)$，则有

$$y_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n_k}(s))\mathrm{d}s + \delta_{n_k}(x)$$

两边对 $n \to +\infty$ 同时取极限，由一致收敛性我们有

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))\mathrm{d}s$$

即解存在.

(2) 即证明 Tonelli 序列在 Picard 定理的条件下一致收敛，从而得证.

一致收敛性由 Lipschitz 条件，和 Picard 定理近乎一样的证明得到. □

例 2.2 *我们可以用 Peano 定理来证明隐函数定理：假设函数 $F(x,y)$ 在平面区域 G 内连续可微，且存在 $x_0, y_0 \in G$，使得*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \ne 0$$

则存在常数 $h > 0$ 使得方程

$$F(x, y) = 0$$

在区间 $|x - x_0| \le h$ 上有唯一解 $y = \phi(x)$，满足 $\phi(x_0) = y_0$.

证明: 由于 $F(x,y)$ 在 G 上连续可微，且 $F'_y(x_0,y_0) \ne 0$，因此存在 $a, b > 0$，使得当

$$G \supset D := \{(x,y) \mid |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\} \ni (x,y)$$

有

$$F'_y(x,y)\neq 0$$

考虑初值问题：

$$\frac{dy}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},\quad y(x_0)=y_0$$

由 Peano 定理，存在 $h>0$，使得初值问题在区间 $|x-x_0|\leq h$ 上至少有一个解 $y=\phi(x)$，即

$$\phi'(x)=-\frac{F'_x(x,\phi(x))}{F'_y(x,\phi(x))},\quad \phi(x_0)=y_0$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,\phi(x))=0$$

又由 $\phi(x_0)=y_0$ 与 $F(x_0,y_0)=0$，可知

$$F(x,\phi(x))=0,\quad |x-x_0|\leq h$$

接下来证明解 $y=\phi(x)$ 的唯一性，假设在区间 $|x-x_0|\leq h$ 上有另一个解 $y=\psi(x)$，则它满足

$$F(x,\psi(x))\equiv 0,\quad \psi(x_0)=y_0$$

于是

$$\begin{aligned}0 &= F(x,\phi(x))-F(x,\psi(x))\\ &=\end{aligned}$$

后未完待续 □

2.4 Osgood 定理

定义 2.4 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，如果对于任意 $(x,y_1),(x,y_2)\in G$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq F(|y_1-y_2|)$$

其中 $F(r)>0$ 是 $r(>0)$ 的连续函数，并且

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{F(r)}\mathrm{d}s=+\infty,\quad \forall\varepsilon>0$$

则称 $f(x,y)$ 对 y 满足 ***Osgood*** 条件.

定理 2.4 (Osgood定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域

$$D = \{(x,y) \mid |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$$

内对 y 满足 *Osgood* 条件，则对于任意的 $(x_0,y_0) \in D$，则微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

的解都是存在且唯一的.

证明: 存在性由 Peano 定理保证，下证唯一性.

假设存在 $(x_0,y_0) \in D$ 使得有两个解

$$y = \phi_1(x), \quad y = \phi_2(x)$$

且存在 $x_1 \ne x_0$，使得 $\phi_1(x_1) > \phi_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$，令

$$\overline{x} = \sup_{x \in [x_0,x_1]} \{x \mid \phi_1(x) = \phi_2(x)\}$$

则我们知道 $\overline{x} \in [x_0,x_1)$，且

$$\phi_1(\overline{x}) = \phi_2(\overline{x}), \quad \phi_1(x) > \phi_2(x), \forall x \in (\overline{x}, x_1]$$

定义

$$r(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$$

则当 $x \in (\overline{x}, x_1)$ 时，$r(x) > 0$，且

$$r'(x) = f(x,\phi_1(x)) - f(x,\phi_2(x)) \le F(|\phi_1(x) - \phi_2(x)|) = F(r(x))$$

于是

$$\frac{1}{F(r)}\,\mathrm{d}r \le \mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^{r(x_1)} \frac{1}{F(r)}\,\mathrm{d}r \le x_1 - \overline{x}$$

其中 $r(x_1) > 0$，与 Osgood 条件矛盾，故唯一性得证. □

笔记 2.1 想证明只有零解的时候 *Osgood* 定理里面的控制函数可以选择为原本的函数，因为有一个 $\phi(x)$ 恒为零.

例如研究下面这个微分方程的解的唯一性

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}0, & y=0\\ y\ln|y|, & y\neq 0\end{cases}$$

当 $y\neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y\ln|y|)=\ln|y|+1$$

由 *Picard* 定理知道对于初始条件 $y(x_0)=y_0\neq 0$ 的附近一个小矩形区域内，有一阶导连续，故满足 *Lipschitz* 条件，从而解唯一.

对于初始条件 $y_0=0$，显然有解 $y\equiv 0$，观察上面 *Osgood* 定理的证明过程，发现只用到了 $f(x,\phi_1(x))-f(x,\phi_2(x))\leq F(|\phi_1(x)-\phi_2(x)|)$，我们设有两个解 $\phi_1=0,\phi_2$，从而发现如果记 $f(x,y)=f(y)=y\ln|y|$，有

$$|f(x,0)-f(x,\phi_2)|\leq f(x,|\phi_2-0|)$$

且由于 f 满足

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=+\infty$$

我们由 *Osgood* 的证明过程知道只有唯一解.

例 2.3 设连续函数 $f(x,y)$ 关于 y 是递减的，证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

在 $x\geq x_0$ 的解是唯一的.

证明: 设存在两个解 $\phi_1(x),\phi_2(x)$，且存在 $x_1>x_0$，使得

$$\phi_1(x_1)>\phi_2(x_1)$$

与 Osgood 定理的证明类似，令

$$\overline{x}=\max_{x\in[x_0,x_1]}\{x\mid\phi_1(x)=\phi_2(x)\}$$

则有

$$\phi_1(\overline{x}) = \phi_2(\overline{x}), \quad \phi_1(x) > \phi_2(x), x \in (\overline{x}, x_1]$$

由 Lagrange 中值定理我们知道存在 $\xi \in (\overline{x}, x_1)$ 使得

$$\phi_1'(\xi) > \phi_2'(\xi)$$

但是由于都是方程的解，我们有

$$\phi_1'(\xi) = f(\xi, \phi_1(\xi)) < f(\xi, \phi_2(\xi)) = \phi_2'(\xi)$$

矛盾，故证毕. □

2.5 解的延伸

定理 2.5 (解的延伸定理) *考虑 Cauchy 问题*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

其中函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，该 Cauchy 问题的任意解曲线 Γ 均可延伸至 G 的边界，即对于 G 内的任意有界闭区域 G_1 及 $(x_0, y_0) \in G_1$，该 Cauchy 问题的解曲线 Γ 可以延伸到 $G \backslash G_1$.

证明: 仅考虑解的正向延伸，即 $x \geq x_0$ 时的延伸，设满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解为 $y = \phi(x)$. 我们来证明 $y = \phi(x)$ 作为 Cauchy 问题的解必可以正向延伸到 $G \backslash G_1$，其中 $G_1 \subset G$ 是包含点 (x_0, y_0) 的任意有界闭区域.

记 $M = \max\limits_{(x,y)\in G_1} |f(x,y)| + 1 < +\infty$. 由于 G 是开集，因此存在 $\delta_0 > 0$，使得

$$\{(x,y) \mid |x-a| \leq \delta_0, |y-b| \leq \delta_0, (a,b) \in G_1\} \subset G$$

在矩形闭区域

$$\{(x,y) \mid |x-x_0| \leq \delta_0, |y-y_0| \leq \delta_0\} \subset G$$

上考虑初值问题

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

由 Peano 定理可知，该初值问题在 $|x-x_0| \leq \delta_0' = \dfrac{\delta_0}{M} < \delta_0$ 上存在解 $y=\phi(x)$. 不妨设 $(x_0+\delta_0', \phi(x_0+\delta_0')) \in G_1$. 考虑初值问题

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0+\delta_0') = \phi(x_0+\delta_0')$$

在矩形闭区域

$$\{(x,y) \in G \mid |x-(x_0+\delta_0')| \leq \delta_0, |y-\phi(x_0+\delta_0')| \leq \delta_0\}$$

上应用 Peano 定理可知，存在区间 $|x-(x_0+\delta_0')| \leq \delta_0'$ 上的解，这样解 $y=\phi(x)$ 就向右侧延伸到区间 $[x_0, x_0+2\delta_0']$ 上，重复这样的过程，就能完成定理的证明. □

推论 2.1 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 上连续，对 y 满足局部 *Lipschitz* 条件，即对于任意的点 $(x,y) \in G$，存在以它为中心的一个矩形区域 $Q \subset G$，使得 $f(x,y)$ 在 Q 上对 y 满足 *Lipschitz* 条件，则对于任意一点 $P_0(x_0,y_0) \in G$，微分方程

$$y' = f(x,y)$$

存在唯一的过点 P_0 的积分曲线 Γ，并且 Γ 在 G 内可以延伸至边界.

笔记 2.2

- 证明解的存在区间是有界的，我们一般采取放缩的办法利用函数有界性来证明 x 的有界性.
- 证明解的存在区间是无穷的，我们一般寻找两个有界解来夹住中间的解，从而由于能延伸到无穷远处，来说明只能横向延伸至无穷处.

2.6 比较定理

定理 2.6 (第一比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 均在区域 G 内连续，且

$$f(x,y) < F(x,y), \quad (x,y) \in G$$

又设函数 $y=\phi(x)$ 和 $y=\Phi(x)$ 在区间 (a,b) 上分别是初值问题.

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y'=F(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解，其中 $(x_0,y_0)\in G$，则

$$\begin{cases} \phi(x)<\Phi(x), & x_0<x<b \\ \phi(x)>\Phi(x), & a<x<x_0 \end{cases}$$

证明： 令 $\psi(x)=\Phi(x)-\phi(x)$，则 $\psi(x)$ 在 (a,b) 上连续可微，且

$$\psi(x_0)=0, \quad \psi'(x_0)=F(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)>0$$

因此存在 $\delta>0$ 使得

$$\begin{cases} \psi(x)>0, & x\in(x_0,x_0+\delta] \\ \psi(x)<0, & x\in[x_0-\delta,x_0) \end{cases}$$

若存在 $x_1>x_0$，使得 $\Phi(x_1)\le\phi(x_1)$，即 $\psi(x_1)\le 0$，令

$$\alpha=\inf\{x\in(x_0+\delta,b)\mid\psi(x)=0\}$$

则我们知道

$$\psi(\alpha)=0, \quad \psi(x)>0, \quad x\in(x_0,\alpha)$$

由此可以知道 $\psi'(\alpha)\le 0$，但是我们知道

$$\psi'(\alpha)=F(\alpha,\Phi(\alpha))-f(\alpha,\phi(\alpha))>0$$

从而矛盾，我们知道结论成立. □

引理 2.5 初值问题

$$\begin{cases} y'=A(x)|y|+B(x)+1 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解在区间 (a,b) 上存在且唯一，其中 $A(x), B(x)$ 是非负的连续函数.

证明: 注意到微分方程右侧的函数关于 y 满足局部 Lipschitz 条件，从而初值问题的解是存在且唯一的，下面证明它是大范围存在的.

由于初值问题右端函数是正的，所以 $\phi(x)$ 是严格的单调递增函数，由此可知 $\phi(x)$ 在 (a,b) 上至多有一个零点，假如 $\phi(x)$ 不变号，不妨设 $\phi(x) \geq 0$，则 $y = \phi(x)$ 满足微分方程

$$y' = A(x)y + B(x) + 1$$

这是一阶线性微分方程，我们由前面的结论知道解在 (a,b) 上存在.

如果存在 $x_1 \in (a,b)$ 使得 $\phi(x_1) = 0$，则由函数 $\phi(x)$ 的单调性得知

$$\phi'(x) = A(x)\phi(X) + B(x) + 1, \quad \phi(x_1) = 0, \quad x \in [x_1, b)$$

以及

$$\phi'(x) = -A(x)\phi(X) + B(x) + 1, \quad \phi(x_1) = 0, \quad x \in (a, x_1]$$

这样我们就知道 $\phi(x)$ 在 (a,b) 上存在. □

同理可以证明下面这个引理：

引理 2.6 初值问题

$$\begin{cases} y' = -A(x)|y| - B(x) - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在区间 (a,b) 上存在且唯一，其中 $A(x), B(x)$ 是非负的连续函数.

推论 2.2 考虑微分方程

$$y' = f(x,y)$$

其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域

$$D := \{(x,y) \mid a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$$

内连续，并且满足

$$|f(x,y)| \leq A(x)|y| + B(x)$$

这里的 $A(x)\ge 0$，$B(x)\ge 0$ 且在区间 (a,b) 上连续，则方程的每一个解的存在区间都是 (a,b).

证明: 假设 $y=\Phi(x)$ 是满足条件的解，我们下面证明 $\Phi(x)$ 的存在区间为 (a,b)，由定理假设知道

$$-A(x)|y|-B(x)-1<f(x)<A(x)|y|+B(x)+1$$

令 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 为方程

$$\begin{cases} y'=A(x)|y|+B(x)+1 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases},\qquad \begin{cases} y'=-A(x)|y|-B(x)-1 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解，由比较定理我们知道

$$\begin{cases} \psi(x)<\Phi(x)<\phi(x), & x>x_0 \\ \phi(x)<\Phi(x)<\psi(x), & x<x_0 \end{cases}$$

由引理知道 $\psi(x),\phi(x)$ 的存在区间为 (a,b)，因此 $\Phi(x)$ 的存在区间也为 (a,b)，定理的证明完毕. □

定义 2.5 如果初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

在区间 $|x-x_0|\le a$ 上有两个解 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$，使得对于该初值问题任意的解 $y(x)$ 满足

$$\Psi(x)\le y(x)\le\Phi(x),\quad |x-x_0|\le a$$

则称 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 为该初值问题在区间 $|x-x_0|\le a$ 上的**最大解与最小解**.

定理 2.7 存在正数 τ，使得在区间 $|x-x_0|\le\tau$ 上，初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的最大解与最小解存在.

证明: 考虑初值问题

$$y' = f_n(x,y) := f(x,y) + \varepsilon_n, \quad y(x_0) = y_0$$

其中 $\varepsilon_n > 0$，并且单调递减趋于 0，由 Peano 定理我们知道初值问题的解在区间 $|x - x_0| \le h_n$ 上存在，其中

$$h_n = \min\left\{a, \frac{b}{M_n}\right\}, \quad M_n = \sup_{(x,y)\in D} |f_n(x,y)|$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty} h_n = h = \min\left\{a, \frac{b}{\sup\limits_{(x,y)\in D} |f(x,y)|}\right\}$$

由此可知，存在正数 $\tau < h$，使得初值问题的解均在区间 $I : |x - x_0| \le \tau$ 上存在，假设 $y = \phi_n(x)$ 是前面初值问题的解，下面证明序列 $\{\phi_n(x)\}$ 有一个收敛到原初值问题的子序列.

事实上，由于

$$|\phi_n(x) - y_0| \le \tau \cdot M_n \le b$$

又有

$$|\phi_n(x_1) - \phi_n(x_2)| \le \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(s,\phi_n(s)) + \varepsilon_n)\mathrm{d}s\right| \le (M + \varepsilon_1)|x_2 - x_1|$$

因此序列一致有界且等度连续，从而有 Ascoli-Arezla 引理我们知道存在一个一致收敛的子序列 $\{\phi_{n_j}(x)\}$，有

$$\lim_{j\to+\infty} \phi_{n_j}(x) = \phi(x), \forall x \in I$$

由一致收敛我们可以得到

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi(s))\mathrm{d}s$$

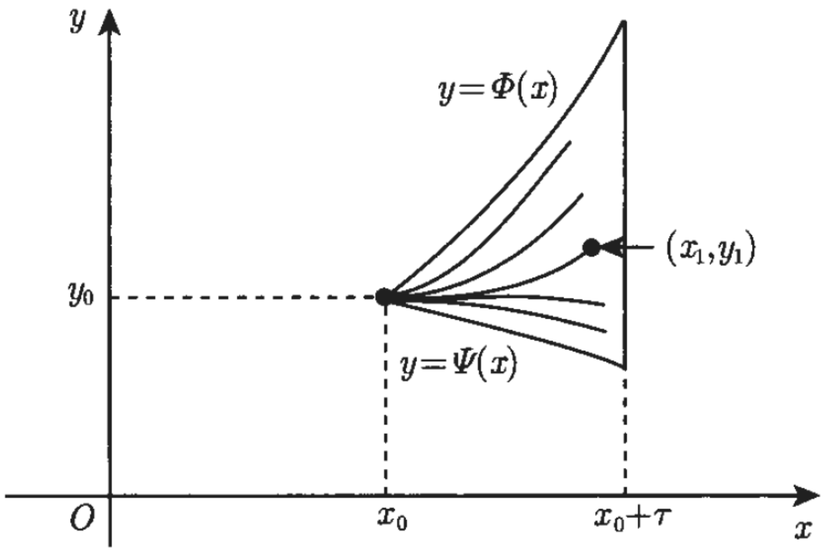
下面证明 $y = \phi(x)$ 是初值问题在区间 $0 \le x - x_0 \le \tau$ 上的最大解与 $-\tau \le x - x_0 \le 0$ 上的最小解，注意到 $\varepsilon_n > 0$，我们有

$$\begin{cases} y(x) \le \phi_n(x), & 0 \le x - x_0 \le \tau \\ y(x) \ge \phi_n(x), & -\tau \le x - x_0 \le 0 \end{cases}$$

取 $n = n_j$ 然后取极限即得，然后将 ε_n 换成 $-\varepsilon_n$ 可以得到对应的另外的最大解与最小解，从而证毕. □

注 2.2 类似于解的延伸定理，我们可以将最大解与最小解延伸至边界.

注 2.3 对于扇形闭区域 $\{(x,y) \mid x_0 \le x \le x_0+\tau, \Psi(x) \le y \le \Phi(x)\}$ 中的任意一点 (x_1,y_1)，由解的延伸定理可以证明一定存在点 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1) 的解曲线，我们称这个扇形闭区域为 ***Peano 扫帚***.



定理 2.8 (第二比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 都在区域 G 内连续，且

$$f(x,y) \le F(x,y), \quad \forall (x,y) \in G$$

又设函数 $y=\phi(x), y=\Phi(x)$ 在区间 (a,b) 上分别是初值问题

$$E_1: \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad E_2: \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，并且 $y=\phi(x)$ 是 E_1 的右侧最小解与左侧最大解，则

$$\begin{cases} \phi(x) \le \Phi(x), & x_0 \le x < b \\ \phi(x) \ge \Phi(x), & a < x < x_0 \end{cases}$$

证明: 假设 $y=\phi(x)$ 是初值问题 E_1 的右侧最小解和左侧最大解，考虑初值问题

$$y'=f(x,y)-\varepsilon_n,\quad y(x_0)=y_0$$

其中 $\varepsilon_n>0$，是单调递减的，由前面定理的证明可以知道存在该初值问题的解序列的一个子序列 $\{\phi_{n_j}(x)\}$，使得

$$\phi_{n_j}(x)\rightrightarrows\phi(x)$$

注意到一次 $f(x,y)-\varepsilon_n<F(x,y)$，由第一比较定理可以知道 $\phi_n(x)$ 满足

$$\begin{cases}\phi_n(x)<\Phi(x), & x>x_0\\ \phi_n(x)>\Phi(x), & x<x_0\end{cases}$$

于是在上式中取 $n=n_j$ 并取极限就得到结论. □

2.7 奇解

定义 2.6 考虑微分方程

$$F(x,y,y')=0$$

设 $\Gamma=\{(x,y)\mid y=\phi(x),x\in J\}$ 是它的一条解曲线，如果对于 Γ 上的任一点 Q，在点 Q 的任意邻域内都有方程的不同于 Γ 的一条解曲线，他与 Γ 在点 Q 处相切，则称 $y=\phi(x)$ 为方程的**奇解**.

笔记 2.3 所谓奇解，就是在这个解的每一点处，微分方程的解都不是唯一的，即微分方程的解的唯一性被破坏.

例 2.4 微分方程 $y=xy'-\frac{1}{2}(y')^2$ 的解 $y=\frac{1}{2}x^2$ 是奇解，由上一章中隐式微分方程的解法可以知道该方程的通解为

$$y=cx-\frac{1}{2}c^2$$

一个特解为

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

对于抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上的任何一点，均有直线族 $y=cx-\frac{1}{2}c^2$ 中的某一条与之相切，从而为奇解.

定理 2.9 假设函数 $F(x,y,p)$ 在区域 $G\subseteq\mathbb{R}^3$ 内连续，且关于 y 与 p 由连续偏导数 $F'_y(x,y,p),F'_p(x,y,p)$. 若函数 $y=\phi(x)(x\in J)$ 是方程

$$F(x,y,y')=0$$

的一个奇解，并且

$$(x,\phi(x),\phi'(x))\in G,\quad x\in J$$

则 $y=\phi(x)$ 满足

$$F(x,y,p)=0,\quad F'_p(x,y,p)=0,\quad p=y'$$

证明: 由于 $y=\phi(x)$ 是方程的解，因此我们有

$$F(x,y,p)=0$$

下面证明第二个不等式成立，如若不然，则存在 $(x_0,y_0,p_0)\in G$，使得

$$F'_p(x_0,y_0,p_0)\neq 0$$

其中 $y_0=\phi(x_0),p_0=\phi'(x_0)$. 由于

$$F(x_0,y_0,p_0)=0$$

由隐函数定理我们可以知道 $F(x,y,p)=0$ 在点 (x_0,y_0) 附近唯一地确定了函数 $f(x,y)$ 使得 $p=f(x,y)$，即

$$y'=f(x,y)$$

其中 $f(x,y)$ 满足 $f(x_0,y_0)=p_0$. 这意味着方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解均是 $y'=f(x,y)$ 的解，由于 $f(x,y)$ 是连续的，且

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,f(x,y))}{F'_p(x,y,f(x,y))}$$

因此 $f(x,y)$ 对于 y 满足局部 Lipschitz 条件，由 Picard 定理可以知道 $y'=f(x,y)$ 满足 $y(x_0)=y_0$ 的解是存在且唯一的，这就证明了 $F(x,y,y')=0$ 在点 (x_0,y_0) 附近没有异于解曲线 $\Gamma:y=\phi(x)$ 且与之相切与点 (x_0,y_0) 的解曲线，这与 $y=\phi(x)$ 是奇解的假设矛盾. $\square$

注 2.4 设

$$F(x,y,p)=0,\quad F'_p(x,y,p)=0,\quad p=y'$$

为方程的 p-**判别式**，从式子中消去 p 得到方程

$$\Delta(x,y)=0$$

称方程 $\Delta(x,y)=0$ 为微分方程的 p-**判别曲线**.

注 2.5 下面的例子表明，由 p-判别式得到的解曲线不一定是原方程的解，即使是解也未必是奇解: *(1)* $(y')^2+y-x=0$.

该方程的 p-判别式为

$$p^2+y-x=0,\quad 2p=0$$

由此得到 $y=x$，但是 $y=x$ 并不是解.

(2) $(y')^2-y^2=0$ 的 p-判别式为

$$p^2-y^2=0,\quad 2p=0$$

得到 $y=0$，是方程的解，但是不是奇解，因为所有解为 $y=ce^{\pm x}$，或者重合或者不相交，从而不是奇解.

上面的例子告诉我们尽管我们将寻找奇解的范围缩小到 p-判别式所决定的曲线，但是这个解不一定是奇解，甚至不是解. 下面这条定理告诉我们奇解存在的充分条件：

定理 2.10 设函数 $F(x,y,p)\in C^2(G)$，再假设由微分方程

$$F(x,y,y')=0$$

决定的 p-判别式

$$F(x,y,p)=0,\quad F'_p(x,y,p)=0$$

消去 p 后得到的函数为 $y=\psi(x)$ 是微分方程的解，并且

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0$$

及

$$\frac{\partial F}{\partial p}(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0$$

对 $x \in J$ 成立，则 $y = \psi(x)$ 是方程的奇解.

证明: 证明较为困难，感兴趣的自行搜索讨论. □

例 2.5 考虑 *Clairaut* 方程

$$y = xp + f(p), \quad p = y', \quad f''(p) \neq 0$$

令 $F(x, y, p) = xp + f(p) - y$，则 p 判别式为

$$xp + f(p) - y = 0, \quad x + f'(p) = 0$$

由上面第二个等式及条件 $f''(p) \neq 0$，可以得到 $p = w(x)$，将其代入到第一个等式有

$$y = \psi(x) = xw(x) + f(w(x))$$

容易验证 $y = \psi(x)$ 是方程的解，又由于

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, \psi(x), \psi'(x)) = -1 \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, \psi(x), \psi'(x)) = f''(\psi'(x)) \neq 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial p}(x, \psi(x), \psi''(x)) = x + f'(\psi'(x)) = 0$$

因此 $y = \psi(x)$ 是奇解.

定理 2.11 假设函数 $F(x, y, p)$ 对 $(x, y, p) \in G$ 是光滑的，且由方程 $F(x, y, p) = 0$ 得到的 p 判别式

$$F(x, y, p) = 0, \quad F_p'(x, y, p) = 0$$

得到的函数 $y=\psi(x)(x\in J)$ 是方程的解，进一步，假设

$$\frac{\partial^{k+l}F}{\partial y^k\partial p^l}(x,\psi(x),\psi'(x))=0,\quad 0\le k\le m-1, 0\le l\le n-1$$
$$\frac{\partial^m F}{\partial y^m}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0$$
$$\frac{\partial^n F}{\partial p^n}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0$$

对 $x\in J$ 成立，其中 n,m 为正整数，如果 $n>m$ 且 m,n 之一为奇数，则 $y=\psi(x)$ 是奇解.

注 2.6 可以看到前面的定理就是这个定理的特例，而这个定理的证明过于复杂，不在这里给出，想要完整的证明可以参见柳彬老师的常微分方程。

2.8 包络

定义 2.7 考虑 (x,y) 平面上的一个单参数曲线族

$$K(c)\colon V(x,y,c)=0$$

其中函数 V 关于 $(x,y,c)\in D\subseteq\mathbb{R}^3$ 是连续可微的，设在 (x,y) 平面上有一条连续可微曲线 Γ，若对于 Γ 上任意一点 P，曲线族 $K(c)$ 中都有一条在该点处与 Γ 相切的曲线 $K(c^*)$，且 $K(c^*)$ 与 Γ 在点 P 的任一邻域内都不相同，则称 Γ 是曲线族 $K(c)$ 的一支**包络**.

定理 2.12 设微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0$$

有通积分

$$U(x,y,c)=0$$

其中 c 为任意常数，又设曲线族 U 有包络为

$$\Gamma\colon y=\phi(x)\quad (x\in J)$$

则 $y=\phi(x)$ 是微分方程的奇解.

证明: 我们只需要证明 $y=\phi(x)$ 是方程的解即可，在曲线 Γ 上任意取一点 (x_0,y_0)，其中 $y_0=\phi(x_0)$，我们知道存在一个曲线 $y=u(x,c_0)$ 与 Γ 相切与这一点，所以我们有

$$\phi(x_0)=u(x_0,c_0),\quad \phi'(x_0)=u'(x_0,c_0)$$

从而由于 $y=u(x,c_0)$ 是微分方程的解，我们知道

$$F(x_0,\phi(x_0),\phi'(x_0))=F(x_0,u(x_0,c_0),u'(x_0,c_0))=0$$

再由 (x_0,y_0) 的任意性我们知道 $y=\phi(x)$ 是微分方程的解. □

笔记 2.4 上面这个定理表明寻找微分方程的奇解可以归结为寻找曲线族的包络.

定理 2.13 设 Γ 是曲线族 $K(c)\colon V(x,y,c)=0$ 的一支包络，假设对于每个 c，Γ 都与曲线族交于 $(f(c),g(c))$，其中 $f(c),g(c)$ 关于 c 连续可微，则 Γ 满足如下判别式:

$$V(x,y,c)=0,\quad V_c'(x,y,c)=0$$

上式称为 c-**判别式**.

证明: 考虑将每点代入即可. □

定理 2.14 设曲线族 $K(c)\colon V(x,y,c)=0$ 的 c-判别式

$$V(x,y,c)=0,\quad V_c'(x,y,c)=0$$

确定一条连续可微且不含于曲线族 K 的曲线

$$\Gamma\colon x=\phi(c),y=\psi(c)(c\in I)$$

它满足非退化条件

$$(V_x'(\phi(c),\psi(c),c),V_y'(\phi(c),\psi(c),c))\neq(0,0)$$

和

$$(\phi'(c),\psi'(c))\neq(0,0)$$

则 Γ 是曲线族的一支包络.

Chapter 3

解对初值和参数的依赖性

由于时间关系，后面的笔记只记录重要节点.

3.1 n 维线性空间中的微分方程

考虑 n 阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$$

如果引入变量

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \cdots, \quad y_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}$$

则等价于下面这个方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} & = & y_2 \\ & \vdots & \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} & = & y_n \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} & = & F(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

由上面的讨论可知, 微分方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n), \end{cases}$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是变量 $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 在某个区域 D 内的已知连续函数.采用向量的记号, 可以将方程组写得更为简洁.

令

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$f_i(x, \mathbf{y}) = f_i(x, y_1, \cdots, y_n),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \cdots, f_n(x, \mathbf{y})) \in \mathbb{R}^n$$

且规定

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right),$$

则方程组可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

其中 $\mathbf{f}$ 是一个关于变量 $(x, \mathbf{y}) \in D$ 的连续的 n 维向量函数. 考虑方程组在如下初始条件下的初值问题:

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

其中初值点 $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

本节的主要结果是初值问题的解的存在和唯一性.为了介绍此结果,需要在 n 维线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中引入模的概念.

在 n 维线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中任取向量 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$,称 $|\mathbf{y}|$ 为y 的模或范数,如果它满足下面的条件:

(1) 正定性: $|\mathbf{y}| \geq 0$,且 $|\mathbf{y}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$;

(2) 正齐次性: $|k\mathbf{y}| = |k| |\mathbf{y}|, \forall k \in \mathbb{R}$;

(3) 三角不等式: $|\mathbf{y} + \mathbf{z}| \leq |\mathbf{y}| + |\ \mathbf{z}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

在 n 维线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中,常用的模有下面三种:

(1) $|\mathbf{y}|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ (Euclid 模);

(2) $|\mathbf{y}|_1 = |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|$ (l^1-模);)

(3) $|y|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} |y_j|$ (l^∞-模).)

容易证明, 这三种模彼此等价, 即由它们定义的开集是一样的.这样一来, 可以按照上述三种模中的任意一种来理解向量的模. 在下面的讨论中, 我们不再区分具体使用的是哪一种模.

在 n 维线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中一旦引入了模,就称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维赋范线性空间. 在 n 维赋范线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中,可以建立大家熟知的微积分和无穷级数中的一致收敛等概念. 特别地,Ascoli-Arzelà 引理在 n 维赋范线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中也是成立的.

现在假设方程 (4.4) 中的函数 f 在有界闭区域

$$R: |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b$$

上连续. 进一步,称 $\mathbf{f}$ 在 R 上对 $\mathbf{y}$ 满足 Lipschitz 条件,如果存在常数 $L>0$,使得对于任意的 $(x,\mathbf{y}_1), (x,\mathbf{y}_2) \in R$,下式成立:

$$|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y}_2)| \le L|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$$

定理 3.1 (Picard定理) *假设函数 f 在有界闭区域 R 上连续,且对 $\mathbf{y}$ 满足 Lipschitz 条件,则初值问题*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

的解在区间 $|x-x_0| \le h$ 上存在且唯一,其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_{(x,\mathbf{y})\in R} |\mathbf{f}(x,\mathbf{y})|}\right\}$$

证明: 我们注意到将一维情况的 Picard 定理证明中的 y 与 f 替换为 $\mathbf{y},\mathbf{f}$ 后不影响证明，从而证毕. □

同样的我们可以证明 n 维的 Peano 定理.

定理 3.2 (Peano定理) *假设函数 f 在有界闭区域 R 上连续,则初值问题*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

的解在区间 $|x-x_0|\le h$ 上存在,其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{\max\limits_{(x,\mathbf{y})\in R}|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})|}\right\}$$

当函数 $f_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 对于 $y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 均为线性函数, 即

$$f_i(x,y_1,\cdots,y_n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\,y_j+e_i(x)\,,\ i=1,2,\cdots,n$$

时, 称方程组 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ 是线性的; 否则, 称之为非线性的. 按照通常的习惯, 引入列向量

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\ \mathbf{e}(x)=\begin{pmatrix}e_1(x)\\e_2(x)\\\vdots\\e_n(x)\end{pmatrix}$$

及矩阵 $\mathbf{A}(x)=(a_{ij}(x))_{n\times n}$. 这样一来,可以将线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\,y_j+e_i(x)\,,\ i=1,2,\cdots,n$$

写成更紧凑的形式:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}(x)\,\mathbf{y}+\mathbf{e}(x)$$

当 $\mathbf{A}(x)$ 和 $\mathbf{e}(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上连续时,容易证明下面的结论.

定理 3.3 方程组

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}(x)\,\mathbf{y}+\mathbf{e}(x)$$

对于任意的初始条件 $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0(a<x_0<b)$ 的解在整个区间 $a<x<b$ 上存在且唯一.

证明: 我们知道 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}+\mathbf{e}(x)$ 关于 $\mathbf{y}$ 满足局部 Lipschitz 连续，从而我们知道存在唯一的解. □

3.2 解对初值和参数的连续依赖性

现在来考虑一般的 n 阶微分方程组初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

的解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x; x_0, \mathbf{y}_0, \lambda)$ 对初值 $(x_0, \mathbf{y}_0)$ 和参数 λ 的依赖性,其中 $\mathbf{f}$ 是 n 维向量函数, $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

做变换

$$t = x - x_0,\ \mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$$

则 t 为新的自变量, $\mathbf{u}(t)$ 是新的未知函数,初值问题变成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t + x_0, \mathbf{u} + \mathbf{y}_0, \lambda), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

注意,原来的初值 (x_0, y_0) 在新的初值问题中和 λ 一样以参数的形式出现,而新初值问题的初值现在固定为$\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$.

因此, 可以只考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

的解对参数 λ 的依赖性.

定理 3.4 设 n 维向量函数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$ 在闭区域

$$G : |x| \le a, |y| \le b, |\lambda| \le c$$

上连续,且对 $\mathbf{y}$ 满足 *Lipschitz* 条件,即对于任意的 $(x, \mathbf{y}_1, \lambda), (x, \mathbf{y}_2 ,\in G$,有

$$|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1, \lambda) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2, \lambda)| \le L |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$$

其中常数 $L > 0$. 令

$$M = \max_{(x, \mathbf{y}, \lambda) \in G} |\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)|,\ h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

则初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$$

的解 $\mathbf{y} = \phi(x, \lambda)$ 在闭区域

$$D : |x| \leq h, |\lambda| \leq c$$

上是连续的.

证明: 证明与 Picard 定理的证明类似, 在这里给出证明的梗概.

Step 1: 初值问题等价于积分方程

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \int_0^x \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(s, \lambda), \lambda) \, \mathrm{d}s$$

Step 2: 构造 Picard 序列:

$$\phi_0(x, \lambda) \equiv 0$$

$$\phi_k(x, \lambda) = \int_0^x \mathbf{f}(x, \phi_{k-1}(s, \lambda), \lambda) \, \mathrm{d}s, \ k = 1, 2, \cdots$$

由此可知 Picard 序列 $\{\phi_k(x, \lambda)\}$ 关于 $(x, \lambda) \in D$ 是连续的.

Step 3: 用数学归纳法证明

$$|\phi_{k+1}(x, \lambda) - \phi_k(x, \lambda)| < \frac{M}{L} \frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!}$$

因此 Picard 序列 $\{\phi_k(x, \lambda)\}$ 对 $(x, \lambda) \in D$ 是一致收敛的.

Step 4: 令

$$\phi(x, \lambda) = \lim_{k \to +\infty} \phi_k(x, \lambda), \ (x, \lambda) \in D$$

则 $\mathbf{y} = \phi(x, \lambda)$ 是初值问题的唯一解. 再由上述 Picard 序列的一致收敛性可知,极限函数 $\phi(x, \lambda)$ 关于 $(x, \lambda) \in D$ 是连续的. □

推论 3.1 设 n 维向量函数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 在闭区域

$$R : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

上连续,且对 y 满足 *Lipschitz* 条件,则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) = \eta \end{cases}$$

的解 $y = \phi(x, \eta)$ 在闭区域 $Q : |x - x_0| \leq \dfrac{h}{2}, |\eta - y_0| \leq \dfrac{b}{2}$ 上连续, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

M 是函数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 的模在 R 中的一个上界.

注 3.1 由于存在且唯一，从而可以在局部同胚于直线，即一种拉直操作.

定理 3.5 考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$$

其中 $\mathbf{f}$ 是区域 $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 上有界、连续的 n 维向量函数. 假设对于任意的初值点 $(x_0, \mathbf{y}_0)$,该方程组的解 $\mathbf{y} = \phi(x; x_0, \mathbf{y}_0, \lambda)$ 是在区间 I_0 上存在且唯一的,其中 $I_0 \subset \mathbb{R}$ 是有界闭区间,则对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,只要 $(\xi, \eta, \lambda') \in G$,且

$$|(\xi, \eta, \lambda') - (x_0, \mathbf{y}_0, \lambda)| < \delta$$

就有

$$|\phi(x; \xi, \eta, \lambda') - \phi(x; x_0, \mathbf{y}_0, \lambda)| < \varepsilon, \ x \in I_0$$

即解对初值和参数是连续依赖的.

证明: 引入变量 $z = \lambda$,则

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{0}$$

方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \ \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{0}$$

而初始条件为

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \ \mathbf{z}(x_0) = \lambda$$

于是, 可以将解对参数的依赖性转化成解对初值的依赖性.

以下仅仅对初值考虑依赖性,即假设在方程的右端函数 $\mathbf{f}$ 与参数 λ 无关.

假设结论不成立,存在 $\varepsilon_0 > 0$,使对于任意的 $i > 0$,都存在 (ξ_i, η_i) 及 $x_i \in I_0$,满足

$$|(\xi_i, \eta_i) - (x_0, \mathbf{y}_0)| < \frac{1}{i}$$

但是

$$|\phi(x_i; \xi_i, \eta_i) - \phi(x_i; x_0, \mathbf{y}_0)| \geq \varepsilon_0$$

由于 $x_i \in I_0, I_0$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界闭区间,因此 $\{x_i\}$ 有一个收敛的子数列. 不妨设 $x_i \to \bar{x} \in I_0 \, (i \to +\infty)$.

注意到

$$\phi(x; \xi, \eta) = \eta + \int_\xi^x \mathbf{f}(s, \phi(s; \xi, \eta)) \, \mathrm{d}s$$

容易证明序列 $\{\phi(x; \xi_i, \eta_i)\}$ 是一致有界且等度连续的. 事实上,假设$|\mathbf{f}|$ 在区域 G 上的上界为 M ,则

$$|\phi(x; \xi, \eta) - \eta| \leq M \, |I_0|$$

$$|\phi(x; \xi, \eta) - \phi(x'; \xi, \eta)| \leq M \, |x - x'|$$

根据 Ascoli-Arzelà 引理,存在在 I_0 上一致收敛的子序列

$$\left\{\phi\left(x; \xi_{i_j}, \eta_{i_j}\right)\right\} : \phi\left(x; \xi_{i_j}, \eta_{i_j}\right) \rightrightarrows \psi(x)$$

由上面 $\phi(x; \xi, \eta)$ 的表达式可知

$$\phi\left(x; \xi_{i_j}, \eta_{i_j}\right) = \eta_{i_j} + \int_{\xi_{i_j}}^x \mathbf{f}\left(s, \phi\left(s; \xi_{i_j}, \eta_{i_j}\right)\right) \mathrm{d}s$$

令 $j \to +\infty$,得到

$$\psi(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{f}(s, \psi(s)) \, \mathrm{d}s$$

即 $\psi(x) \equiv \phi(x; x_0, \mathbf{y}_0)$. 可知

$$\left|\phi\left(x_{i_j}; \xi_{i_j}, \eta_{i_j}\right) - \phi\left(x_{i_j}; x_0, y_0\right)\right| \geq \varepsilon_0$$

令 $j \to +\infty$,可得出矛盾,所以结论成立. $\square$

注 3.2 从定理的证明可看出,“对于任意的初值点 $(x_0, \mathbf{y}_0)$,该方程组的解 $\mathbf{y} = \phi(x; x_0, \mathbf{y}_0)$ 是存在且唯一的” 这一假设不是必要的. 只要假设对于某个初值 $(x_0, \mathbf{y}_0)$,该方程组的解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x; x_0, \mathbf{y}_0)$ 存在且唯一,则解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x; \xi, \eta)$ 就在 $(x_0, \mathbf{y}_0)$ 的一个邻域内连续.

注 3.3 假设区间 I_0 是有界闭区间是必要的. 例如, 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

的解为 $\mathbf{y}(x; x_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 \mathrm{e}^{x - x_0}$. 显然,不等式

$$|\mathbf{y}(x; x_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(x; x_0', \mathbf{y}_0')| < \varepsilon$$

不可能在无穷区间上成立.

3.3 解对初值和参数的连续可微性

与上一节类似，可以将对初值的研究转化为对参数的研究，考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda) \\ \mathbf{y}(0) = 0 \end{cases}$$

定理 3.6 设 n 维向量函数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$ 在闭区域

$$G: |x| \leq a, |y| \leq b, |\lambda| \leq c$$

上连续,且对 y 和 λ 有连续偏导数,则初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda), \quad \mathbf{y}(0) = 0$$

的解 $y = \phi(x, \lambda)$ 在闭区域

$$D: |x| \leq h, |\lambda| \leq c$$

上是连续可微的,其中常数 h 的定义与定理 *3.1* 中的相同.

注 3.4 假如 $\phi(x,\lambda)$ 对于 λ 是连续可微的. 由

$$\phi(x,\lambda)=\int_0^x \mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)\,\mathrm{d}s$$

两端对 λ 求导数,得到

$$\frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)\frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)\right)\mathrm{d}s,$$

令 $\mathbf{U}(x,\lambda)=\dfrac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda}$,则矩阵 $\mathbf{U}(x,\lambda)$ 满足线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(x,\phi(x,\lambda),\lambda)\,\mathbf{U}(x,\lambda)+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(x,\phi(x,\lambda),\lambda)$$

及

$$\mathbf{U}(0,\lambda)=\mathbf{0}$$

于是,只要证明以下结论即可: 当 $\lambda\to\lambda_0$ 时,

$$|\phi(x,\lambda)-\phi(x,\lambda_0)-U(x,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)|=o(|\lambda-\lambda_0|)$$

证明: 记满足线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(x,\phi(x,\lambda),\lambda)\,\mathbf{U}(x,\lambda)+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(x,\phi(x,\lambda),\lambda)\quad\bigstar$$

及条件 $\mathbf{U}(0,\lambda)=0$ 的矩阵为 $\mathbf{U}(x,\lambda)$. 由 Picard 定理和解对初值和参数的连续依赖性可知, $\mathbf{U}(x,\lambda)$ 在区间 $|x|\le h$ 上存在且唯一,对 λ 连续,并且

$$\mathbf{U}(x,\lambda)=\int_0^x\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)\,\mathbf{U}(s,\lambda)+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)\right)\mathrm{d}s$$

由于

$$\phi(x,\lambda)=\int_0^x \mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)\,\mathrm{d}s$$

所以

$$\begin{aligned}&\phi(x,\lambda)-\phi(x,\lambda_0)-\mathbf{U}(x,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)\\=&\int_0^x\Big[\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)-\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda_0),\lambda_0)\\&-\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,\phi(s,\lambda_0),\lambda_0)\,\mathbf{U}(s,\lambda_0)+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(s,\phi(s,\lambda_0),\lambda_0)\right)(\lambda-\lambda_0)\Big]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)-\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda_0),\lambda_0)\\
=\ &\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda),\lambda)-\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda_0),\lambda)+\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda_0),\lambda)-\mathbf{f}(s,\phi(s,\lambda_0),\lambda_0)\\
=\ &\int_0^1\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,t\phi(s,\lambda)+(1-t)\phi(s,\lambda_0),\lambda)(\phi(s,\lambda)-\phi(s,\lambda_0))\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^1\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(s,\phi(s,\lambda_0),t\lambda+(1-t)\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

令 $\phi(\cdot)=\phi(\cdot,\lambda),\phi_0(\cdot)=\phi(\cdot,\lambda_0),U(\cdot)=U(\cdot,\lambda),U_0(\cdot)=\mathbf{U}(\cdot,\lambda_0)$ 以及

$$\Delta(x)=|\phi(x,\lambda)-\phi(x,\lambda_0)-\mathbf{U}(x,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)|$$

则

$$\begin{aligned}
\Delta(x)\ \le\ &\left|\int_0^x\int_0^1\left|\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,t\phi+(1-t)\phi_0,\lambda)\,\mathrm{d}t\right|\Delta(s)\,\mathrm{d}s\right|\\
&+\left|\int_0^x\int_0^1\left|\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,t\phi+(1-t)\phi_0,\lambda)-\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,\phi_0,\lambda_0)\right||\mathbf{U}_0||\lambda-\lambda_0|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right|\\
&+\left|\int_0^x\right|\int_0^1\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(s,\phi_0,t\lambda+(1-t)\lambda_0)-\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(s,\phi_0,\lambda_0)\right)(\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{d}t\,|\,\mathrm{d}s|
\end{aligned}$$

由定理假设以及解对初值与参数的连续依赖性可知,对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$,只要 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$,当 $|x|\le h$ 时,就有

$$|\phi(x,\lambda)-\phi(x,\lambda_0)|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,t\phi+(1-t)\phi_0,\lambda)-\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,\phi_0,\lambda_0)\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(s,\phi_0,t\lambda+(1-t)\lambda_0)-\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(s,\phi_0,\lambda_0)\right|<\varepsilon$$

以及存在常数 $M>0$,使得

$$\left|\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(s,t\phi+(1-t)\phi_0,\lambda)\,\mathrm{d}t\right|\le M,\ |\mathbf{U}(x,\lambda_0)|\le M$$

不妨设 $x>0$ (当 $x<0$ 时,可做类似的讨论). 由上面的式子可知

$$\Delta(x)\le M\int_0^x\Delta(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon(M+1)h|\lambda-\lambda_0|$$

由 Gronwall 不等式可以得到

$$\Delta(x) \leq (M+1)\, h e^{Mh} \varepsilon \left|\lambda - \lambda_0\right|$$

这意味着,当 $\lambda \to \lambda_0$ 时, $\Delta(x) = o(|\lambda - \lambda_0|)$. 因此,得到

$$\frac{\partial \phi(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \mathbf{U}(x,\lambda)$$

注意到 $\mathbf{U}(x,\lambda)$ 是方程组 ★ 的解,由定理的条件和定理 3.1 可知, $\mathbf{U}(x,\lambda)$ 关于 λ 是连续的. $\square$

推论 3.2 设 n 维向量函数 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ 在闭区域 $R: |x-x_0| \leq a$,$|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0| \leq b$ 上连续,且对 $\mathbf{y}$ 有连续偏导数 $\mathbf{f}'_{\mathbf{y}}(x,\mathbf{y})$,则对于 $|\eta - \mathbf{y}_0| < \frac{b}{2}$,初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) = \eta \end{cases}$$

的解 $\mathbf{y} = \phi(x,\eta)$ 在闭区域 $D: |x-x_0| \leq \frac{h}{2}, |\eta - \mathbf{y}_0| \leq \frac{b}{2}$ 上是连续可微的.

定理 3.7 假设函数 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda)$ 在闭区域

$$G: |x-x_0| \leq a, |\mathbf{y}-\mathbf{y}_0| \leq b, |\lambda| \leq c$$

上连续,对 $\mathbf{y}$ 和 λ 有连续偏导数,则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

在闭区域 $R: |x-x_0| \leq h, |\lambda| \leq c$ 上的唯一解 $\mathbf{y} = \phi(x;x_0,\mathbf{y}_0,\lambda)$ 对 $(x_0,\mathbf{y}_0,\lambda)$ 可微.

微分同胚的一些东西省略了没写，可以参见柳彬老师的常微分方程.