

数理方程笔记

Settings

- 授课教师：魏雅薇
- 参考教材：广义函数与数学物理方程/齐民友
- 分数组成：
- 参考文献：
 - 《椭圆与抛物型方程引论》伍卓群
 - 《广义函数与数学物理方程》齐民友
 - 《数理方程》谷超豪
 - PDE, Evans
- Contents
 1. 准备知识
 1. 常用不等式 + 基本定理
 2. 磨光：截断函数+单位分解
 3. Sobolev 空间+Holder空间
 2. 二阶线性椭圆方程
 1. Laplace 方程：基本解，Green 函数及其性质，调和函数性质
 2. Poisson 方程：变分法及 2-阶线性估计
 3. \mathcal{L}^2 理论
 3. 二阶线性抛物方程
 1. 热传导方程：基本解，初值问题，初边值问题($n = 1$).
 2. 能量方法
 3. Galerkin 方法
 4. 二阶线性双曲方程
 1. 波动方程：基本解，初值问题($n = 1, 2, 3$)，初边值问题($n = 1$)，能量方法
 2. 半群理论

2025-09-08

Chapter 1: 准备知识

1.1 常用不等式

1.1.1 Young 不等式

(定理) Thm

$a, b > 0, p, q > 1$, 有 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

证明:

我们注意到 $x^{\frac{1}{p}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是上凸的, 所以我们知道在 $x = 1$ 处的切线 $y = \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}$ 在整条曲线的上方, 即对于任意的 $x > 0$, 有 $y = \frac{1}{p}x + \frac{1}{q} \geq x^{\frac{1}{p}}$, 我们令 $x = \frac{u}{v}$, 得到

$$\frac{u}{pv} + \frac{1}{q} \geq \frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}}$$

化简得到

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} \geq u^{\frac{1}{p}}v^{1-\frac{1}{p}} = u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{q}}$$

再令 $u = a^p, v = b^q$, 我们立刻得到

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

一个常用的推论是带 ε 的 Young 不等式, 即

(推论) Cor

相同的条件, 对 $\varepsilon > 0$, 有 $\varepsilon a^p + \varepsilon^{-\frac{p}{q}} b^q \geq ab$.

证明:

只需要在 Young 不等式中取 $a = \varepsilon^{\frac{1}{p}} a, b = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} b$ 即可.

1.1.2 Holder 不等式

(定理) Thm

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为可测开集, $p, q > 1$, 有 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 设 $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, 则有 $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, 并

且 $\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$.

证明:

在 Young 不等式中令

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{\mathcal{L}^p}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{\mathcal{L}^q}}$$

我们得到

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f(x)\|_{\mathcal{L}^p} \|g(x)\|_{\mathcal{L}^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f(x)\|_{\mathcal{L}^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g(x)\|_{\mathcal{L}^q}^q}$$

在两边积分立刻得到

$$\frac{\|fg\|_{\mathcal{L}^1}}{\|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

于是我们得到了

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$$

1.1.3 Minkovski 不等式

(定理) Thm

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $p \geq 1$, 并且 $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, 则有 $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}$.

证明:

首先我们需要说明 $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, 这是因为

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (2 \max(|f(x)|, |g(x)|))^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

所以 $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, 令 $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, 我们注意到 $(f + g)^{p/q} \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, 由 Holder 不等式有

$$\|f \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q}, \quad \|g \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q}$$

再结合

$$|f + g|^p = |f + g| \cdot |f + g|^{p/q} \leq |f| \cdot |f + g|^{p/q} + |g| \cdot |f + g|^{p/q}$$

对两边积分, 有

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq \|f \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} + \|g \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q}$$

注意到

$$\|(f+g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q} = \|f+g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q}$$

所以有

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}) \|f+g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q}$$

约分即

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}$$

1.1.4 列紧性

(定理) (Arzela-Ascoli)

$F \subset C(M)$, M 为紧集, $C(M)$ 为 M 上的连续函数, 有: F 列紧 $\iff F$ 一致有界且等度连续.

(定义) Def

拓扑空间 X 的子集 M 称为**相对紧**的, 如果其闭包为紧集.

这玩意实际上应该叫做**预紧**(precompact).

(定义) Def

拓扑空间 X 的子集 F 称为**弱列紧**, 如果任取其中任一序列存在弱收敛子列. 称为**弱相对收敛**, 如果其闭包中任一序列存在弱收敛子列. F 称为**强列紧**, 如果任取其序列均存在强收敛子列.

(定理) Thm

当 $1 < p < \infty$ 时, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ 中的集合为弱列紧的 \iff 为其范数有界.

(定理) Thm

当 $1 < p < \infty$ 时, 函数列 $X \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ 相对强列紧的充分必要条件为:

(1) $\{\|f\|_{\mathcal{L}^p} \mid f \in X\}$ 有界.

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$ 对 $f \in X$ 一致成立, 则称为 X 等度连续.

(3) 对 $f \in X$ 一致有 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| > R, x \in \Omega} |f(x)|^p dx = 0$.

1.2 磨光, 截断函数, 单位分解

(定义) Def

$\alpha \in \mathbb{N}^n$ 为重指标, 有 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 我们定义 $|\alpha| = \sum \alpha_i$.

我们定义

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} u \dots \partial^{\alpha_n} u}$$

于是我们可以定义

(定义) Def

$C^k(\Omega)$ 为 Ω 中 k -阶连续可微的全体函数集合, 并且定义

$$|u|_{k, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha u|$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, 我们定义

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha! := \prod_{i=1}^n (\alpha_i!)$$

RMK: $C^k(\Omega)$ 是完备的赋范线性空间和 Banach 空间.

1.2.1 磨光变换

(定义) Def

$C_0^\infty(\Omega)$ 为 Ω 上具有紧支集的光滑函数.

我们可以定义在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中如何收敛, 设 $\{\phi_n(x)\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ 收敛于 0 指

- 存在一个紧集 K , 使得对于任意的 $\phi_n(x)$, 有 $\text{supp } \phi_n \subset K$.

- $\phi_n(x)$ 的任意固定阶 α 微分的序列对 x 一致收敛到 0. 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \phi_k(x)| \right) = 0$$

(定义) Def

设 $j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为一非负函数, 满足 $\text{supp } j(x) \subset \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$, 且满足 $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$, 对于 $\varepsilon > 0$, 我们记 $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 称 $j_\varepsilon(x)$ 为磨光核.

如果 $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$, 则我们有 $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\frac{x}{\varepsilon} = 1$, 所以磨光核的积分值也是 1. 并且磨光核 $j_\varepsilon(x)$ 的支集包含在 $\overline{B_\varepsilon(0)}$ 中.

例子: 磨光核

$j(x)$ 的典型例子是

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} e^{1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

其中 $A = \int_{B_1(0)} e^{1/(|x|^2-1)} dx$.

(定义) Def

对于函数 $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, 令

$$u_\varepsilon(x) = (j_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) u(y) dy$$

称 $u_\varepsilon(x)$ 为 $u(x)$ 的磨光.

函数 f 属于 $L_{loc}^1(\Omega)$, 当且仅当对于任意紧集 $K \subset \Omega$, 都有:

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

我们注意,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(y) f(x-y) dy = \int_{B_\varepsilon(0)} j_\varepsilon(y) f(x-y) dy$$

这告诉我们如果 f 定义在 U 上, 则 f_ε 就可以定义在 $\{x \in U \mid d(x, \partial U) > \varepsilon\}$ 上.

C.5. Convolution and smoothing. We next introduce tools that will allow us to build smooth approximations to given functions.

NOTATION. If $U \subset \mathbb{R}^n$ is open and $\epsilon > 0$, we write

$$U_\epsilon := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}.$$

DEFINITIONS.

(i) Define $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ by

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1, \end{cases}$$

the constant $C > 0$ selected so that $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.

(ii) For each $\epsilon > 0$, set

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

We call η the *standard mollifier*. The functions η_ϵ are C^∞ and satisfy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dx = 1, \quad \text{spt}(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon).$$

DEFINITION. If $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ is locally integrable, define its *mollification*

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \quad \text{in } U_\epsilon.$$

That is,

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y)f(y) \, dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y) \, dy$$

for $x \in U_\epsilon$.

THEOREM 7 (Properties of mollifiers).

- (i) $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.
- (ii) $f^\epsilon \rightarrow f$ a.e. as $\epsilon \rightarrow 0$.
- (iii) If $f \in C(U)$, then $f^\epsilon \rightarrow f$ uniformly on compact subsets of U .
- (iv) If $1 \leq p < \infty$ and $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$, then $f^\epsilon \rightarrow f$ in $L^p_{\text{loc}}(U)$.

Proof.

1. Fix $x \in U_\epsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$, and h so small that $x + he_i \in U_\epsilon$. Then

$$\begin{aligned} \frac{f^\epsilon(x + he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) \right] f(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) \right] f(y) \, dy \end{aligned}$$

for some open set $V \subset\subset U$. As

$$\frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \eta_{x_i} \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right)$$

uniformly on V , the partial derivative $f_{x_i}^\epsilon(x)$ exists and equals

$$\int_U \eta_{\epsilon, x_i}(x - y) f(y) dy.$$

A similar argument shows that $D^\alpha f^\epsilon(x)$ exists, and

$$D^\alpha f^\epsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\epsilon(x - y) f(y) dy \quad (x \in U_\epsilon),$$

for each multiindex α . This proves (i).

2. According to Lebesgue's Differentiation Theorem (§E.4),

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

for a.e. $x \in U$. Fix such a point x . Then

$$\begin{aligned} |f^\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x, \epsilon)} \eta_\epsilon(x - y) [f(y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x, \epsilon)} \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq C \int_{B(x, \epsilon)} |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0 \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

by (4). Assertion (ii) follows.

3. Assume now $f \in C(U)$. Given $V \subset\subset U$, we choose $V \subset\subset W \subset\subset U$ and note that f is uniformly continuous on W . Thus the limit (4) holds uniformly for $x \in V$. Consequently the calculation above implies $f^\epsilon \rightarrow f$ uniformly on V .

4. Next, assume $1 \leq p < \infty$ and $f \in L_{loc}^p(U)$. Choose an open set $V \subset\subset U$ and, as above, an open set W so that $V \subset\subset W \subset\subset U$. We claim that for sufficiently small $\epsilon > 0$

$$(5) \quad \|f^\epsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}.$$

To see this, we note that if $1 \leq p < \infty$ and $x \in V$,

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon^{1-1/p}(x-y)\eta_\varepsilon^{1/p}(x-y)|f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dy \right)^{1-1/p} \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Since $\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dy = 1$, this inequality implies

$$\begin{aligned} \int_V |f^\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_V \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B(y,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dx \right) dy = \int_W |f(y)|^p dy, \end{aligned}$$

provided $\varepsilon > 0$ is sufficiently small. This is (5).

5. Now fix $V \subset\subset W \subset\subset U$, $\delta > 0$, and choose $g \in C(W)$ so that

$$\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta.$$

Then

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &\leq \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \quad \text{by (5)} \\ &\leq 2\delta + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

Since $g^\varepsilon \rightarrow g$ uniformly on V , we have $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta$. \square

2025-09-10

特别地, 如果 $f(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 设 $\text{supp } f \subset K$, 其中 K 是紧集, 则我们有结论:

$$f_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

并且有

$$\text{supp } f_\varepsilon \subseteq K_\varepsilon := \{x \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}$$

这是因为

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} j_\varepsilon(y)f(x-y)dy$$

当 $d(x, K) > \varepsilon$ 时, 对于 $y \in B_\varepsilon(0)$, 有 $f(x-y) \notin K$, 从而 $f(x-y) = 0$, 于是 $f_\varepsilon(x) = 0$.

我们还有结论: 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, $f_\varepsilon \rightarrow f$.

(定理) Thm

设 Ω 为开集, $f(x) \in C(\Omega)$, 则对 Ω 的任意紧子集 K , 存在一列函数 $\{\tilde{f}_\varepsilon(x)\}$ 在 K 上一致收敛到 $f(x)$.

证明:

已知 $K \subset \Omega$, 由欧式空间的正规性, 知道存在闭集 F 使得 $K \subset F^\circ \subset \overline{F} \subset \Omega$.

所以我们知道存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$, 我们令

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_{\varepsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{\varepsilon_0} \end{cases}$$

对于任意的 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, 取 J_ε 为磨光核, 有

$$\widetilde{f}_\varepsilon(x) = J_\varepsilon(x) * \widetilde{f}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

有

$$\text{supp } \widetilde{f}_\varepsilon \subset K_{\varepsilon_0 + \varepsilon} \subset K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$$

于是对于任意的 $x \in K$, 我们计算

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)(f(x) - \widetilde{f}(y)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) |f(x) - \widetilde{f}(y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in K, |x-y| \leq \varepsilon} |f(x) - \widetilde{f}(y)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \sup_{x \in K, |x-y| \leq \varepsilon} |f(x) - \widetilde{f}(y)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

这个估计是对 $x \in K$ 一致的, 所以得证.

(推论) Cor

Ω 是开集, 如果 $f(x) \in C^k(\Omega)$, 则对 Ω 内的任一紧集 K , 可以构造一族光滑紧支集函数 \tilde{f}_ε 使得对于任意的 $a \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$, 有

$$\partial_x^\alpha \widetilde{f}_\varepsilon(x) \rightarrow \partial_x^\alpha f(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

证明:

同理我们知道存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$, 我们令

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_{\varepsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{\varepsilon_0} \end{cases}$$

对于任意的 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, 取 J_ε 为磨光核, 有

$$\widetilde{f}_\varepsilon(x) = J_\varepsilon(x) * \widetilde{f}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

我们估计

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \widetilde{f}_\varepsilon - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left| \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &\leq \sup_{|x-y| < \varepsilon} |\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |J_\varepsilon(y)| dy \end{aligned}$$

当 $x \in K$ 时, 由于 $|x-y| < \varepsilon$, 所以 $y \in K_\varepsilon$, 所以 $\widetilde{f}(y) = f(y)$, 所以

$$\sup_{|x-y| < \varepsilon} |\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| = \sup_{|x-y| < \varepsilon} |\partial_y^\alpha f(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)$$

所以我们知道一致趋于零.

⚠ 注意:

我们需要解释其中一步, 即

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

这个公式的成立是基于高维空间中的分部积分法 (Integration by Parts), 并且是弱导数 (Weak Derivative) 或分布导数 (Distributional Derivative) 定义的核心思想。

我们先从一维单次求导的情况开始理解, 这会更直观。假设 $n = 1$ 且 $|\alpha| = 1$ 。我们想要证明:

$$-\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

经典的分部积分公式是 $\int u dv = uv - \int v du$ 。

我们令 $u = \widetilde{f}(y)$ 并且 $dv = \frac{d}{dy} J_\varepsilon(x-y) dy$, 那么 $du = \frac{d}{dy} \widetilde{f}(y) dy$ 并且 $v = J_\varepsilon(x-y)$ 。

将其代入分部积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_{\varepsilon}(x-y) dy = \left[\tilde{f}(y) J_{\varepsilon}(x-y) \right]_{y=-\infty}^{y=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} J_{\varepsilon}(x-y) \frac{d}{dy} \tilde{f}(y) dy$$

这里的关键在于函数 $J_{\varepsilon}(z)$ 的性质。 J_{ε} 是一个磨光核 (mollifier)，它具有紧支撑集 (compact support)。

- 紧支撑集意味着这个函数在一个有界区域之外恒等于零。也就是说，存在一个半径 R (通常是 ε)，使得当 $|z| > R$ 时， $J_{\varepsilon}(z) = 0$ 。
- 对于我们的被积函数 $J_{\varepsilon}(x-y)$ ，当 $|x-y| > \varepsilon$ 时，函数值为零。这意味着对于任意固定的 x ，当 y 趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时， $|x-y|$ 必然会大于 ε 。
- 因此，无论 $\tilde{f}(y)$ 的值是什么，边界项 $\left[\tilde{f}(y) J_{\varepsilon}(x-y) \right]_{y=-\infty}^{y=\infty}$ 在两个端点处都等于零。

所以，分部积分公式简化为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_{\varepsilon}(x-y) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} \tilde{f}(y) J_{\varepsilon}(x-y) dy$$

两边乘以 -1，就得到了一维情况下的结果。

这个思想可以推广到 n 维空间和任意阶的多重指标导数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 。

在高维空间中，分部积分法源于高斯散度定理 (Gauss's Divergence Theorem)。通过反复应用这个定理，我们可以将导数从一个函数“转移”到另一个函数上。

这个推导的核心技巧是构造一个巧妙的矢量场，然后将散度定理应用其上。

我们一步一步来。我们的目标是证明，对于任意一个方向 y_i (例如 y_1, y_2, \dots, y_n 中的一个)，以下公式成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \frac{\partial J_{\varepsilon}(x-y)}{\partial y_i} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \tilde{f}(y)}{\partial y_i} J_{\varepsilon}(x-y) dy$$

我们知道，对于两个函数 g 和 h ，它们乘积的偏导数是：

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (g \cdot h) = \frac{\partial g}{\partial y_i} h + g \frac{\partial h}{\partial y_i}$$

移项后得到：

$$g \frac{\partial h}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} (g \cdot h) - \frac{\partial g}{\partial y_i} h$$

现在，我们在整个 \mathbb{R}^n 空间中对这个等式进行积分：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \frac{\partial h}{\partial y_i} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i} (g \cdot h) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial y_i} h dy \quad (*)$$

我们的任务就是证明右边的第一项积分等于零。为了使用散度定理，我们需要一个矢量场。我们来构造一个非常特殊的矢量场 \mathbf{F} ，它在所有分量上都为零，除了第 i 个分量：

$$\mathbf{F}(y) = (0, \dots, 0, \underbrace{g(y)h(y)}_{\text{第 } i \text{ 个分量}}, 0, \dots, 0)$$

现在，我们来计算这个矢量场 \mathbf{F} 的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_i} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = 0 + \cdots + \frac{\partial}{\partial y_i}(g(y)h(y)) + \cdots + 0$$

所以，我们得到：

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h)$$

高斯散度定理告诉我们： $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$ 。

我们的积分是在整个 \mathbb{R}^n 空间上进行的，在实际操作中，我们取一个非常大的区域 V （例如一个半径为 R 的超球体），计算积分，然后让 R 趋向于无穷大，这个区域 V 的边界就是 S （半径为 R 的超球面）。

将我们构造的 \mathbf{F} 代入散度定理：

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

其中 \mathbf{n} 是边界 S 的单位外法向量。 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 的点积结果是 $F_1 n_1 + \cdots + F_i n_i + \cdots = (g \cdot h) n_i$ 。
所以我们有：

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = \int_S (g \cdot h) n_i dS$$

现在，我们把具体的函数代入。令 $g(y) = \tilde{f}(y)$ 并且 $h(y) = J_\varepsilon(x - y)$ 。

边界积分项就变成了 $\int_S \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x - y) n_i dS$ 。

这里的**决定性因素**是磨光核 J_ε 具有**紧支撑集 (compact support)**。对于充分大的区域，积函数在整个边界 S 上都为零，那么边界积分的结果自然就是零：

$$\int_S \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x - y) n_i dS = 0$$

因为边界项为零，所以我们证明了：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{V_R} \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = 0$$

现在回到我们第一步的公式 (*)：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \frac{\partial h}{\partial y_i} dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy}_0 - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial y_i} h dy$$

于是我们就得到了：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \frac{\partial h}{\partial y_i} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial y_i} h dy$$

这就是高维空间中的分部积分法。

每转移一次偏导数 ∂_{y_i} ，就会产生一个负号。例如，我们将 ∂_{y_i} 从 J_ε 转移到 \tilde{f} ：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \partial_{y_i} J_\varepsilon(x-y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{y_i} \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

边界项同样因为 J_ε 的紧支撑性质而消失。

我们要转移的导数是 $\partial_y^\alpha = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{y_n}^{\alpha_n}$ 。这个过程包含了总共 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 次求导。每次转移一个一阶偏导数，都会引入一个 (-1) 的系数。因此，在把所有 $|\alpha|$ 次求导都从 $J_\varepsilon(x-y)$ 转移到 $\tilde{f}(y)$ 之后，总共会产生一个 $(-1)^{|\alpha|}$ 的系数。

这就得到了最终的公式：

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

笔记：

这个公式在现代数学分析中至关重要，因为它正是**弱导数**的定义方式。

函数 \tilde{f} 可能不是传统意义上可微的（例如，它可能在某些点有尖角或跳跃）。然而，我们可以通过这个积分公式来**定义**它的导数。

我们称函数 g 是 \tilde{f} 的 α -阶弱导数（记作 $g = \partial^\alpha \tilde{f}$ ），如果对于**所有**光滑且具有紧支撑的“测试函数” ϕ （在我们的例子中， $J_\varepsilon(x-y)$ 就扮演了这个角色），以下等式都成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \phi(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \partial^\alpha \phi(y) dy$$

所以，公式实际上可以看作是用光滑的磨光核 J_ε 来定义（或计算）函数 \tilde{f} 的弱导数 $\partial^\alpha \tilde{f}$ 。这种“通过积分将导数作用转移到光滑函数上”的方法，是处理非光滑函数求导的核心工具。

（引理）卷积的Young不等式

假设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 并且 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 。设 $1 \leq p, q, r \leq \infty$ 并且满足以下关系：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

那么，它们的卷积 $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$ 是良定义的（对于几乎所有的 x ），并且属于 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 空间。其 L^r 范数满足以下不等式：

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

特例 1: $q = 1$

如果 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ，那么条件变为 $\frac{1}{p} + 1 = 1 + \frac{1}{r}$ ，这意味着 $r = p$ 。

不等式变为:

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$$

这是最常用的一个版本。它说明, 用一个 L^1 函数去卷积一个 L^p 函数, 得到的结果仍然是一个 L^p 函数, 并且其范数被两个原始函数的范数乘积所控制。这在偏微分方程中, 当 g 是一个基本解 (通常是 L^1 函数) 时尤其有用。

特例 2: $r = \infty$

如果我们想让卷积结果 $f * g$ 是一个有界函数 (属于 L^∞), 那么 $\frac{1}{r} = 0$ 。

条件变为 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。这组 (p, q) 是一对 **共轭指数** (与赫尔德不等式中的指数相同)。

不等式变为:

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

这说明, 如果 $f \in L^p$ 且 $g \in L^q$ 并且 p, q 是共轭的, 那么它们的卷积是一个 **有界连续函数**。

(定理) Thm

$u(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, 可以定义 $u_\varepsilon(x) = J_\varepsilon(x) * u(x)$, 我们有结论:

(1) 若 $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\bar{\Omega})$, 则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(2) 若 $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\bar{\Omega})$, $\text{supp } u \subset K \subset\subset \Omega$, 且 $\text{dist}(\text{supp } u, \partial\Omega) > \varepsilon$, 则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(3) $u \in \mathcal{L}^p(\Omega) (1 \leq p < \infty)$, 则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, 且

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^p}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{L}^p} = 0$$

证明:

前两个结果在前面已经证明, 现在证明第三个结果. 首先我们使用卷积的 Young 不等式, 所以自然有

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p} = \|u * J_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^p} \cdot \|J_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1} = \|u\|_{\mathcal{L}^p}$$

记得

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x-y) dy$$

所以我们有

$$\|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x-y) dy \right|^p dx$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x-y) dy$$

由积分的绝对连续性，知道

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy = 0$$

并且我们知道

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy \right| \leq |u_\varepsilon(x)| + |u(x)|$$

右边是 \mathcal{L}^p 可积函数，所以是控制函数，所以由 DCT 我们知道

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{L}^p}^p = 0$$

1.2.2 截断函数

考虑 $K \subset\subset \Omega$ 为紧集，称 $f(x)$ 为**截断函数**，如果 f 满足 $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 并且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \notin K_{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

我们现在来构造截断函数：对于 $K \subset\subset \Omega$ ，取 K_{ε_0} 上的特征函数 $\chi(x)$ ，对 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 我们令

$$f_\varepsilon = J_\varepsilon * \chi$$

我们自然有 $f_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ，并且 $\text{supp } f_\varepsilon \subseteq K_{2\varepsilon_0}$ ，所以是截断函数。

(定理) Thm

我们可以对截断函数作估计，对于固定的 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ，存在常数 C 使得

$$|\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x)| \leq C \cdot \varepsilon^{-|\alpha|}$$

证明：

直接计算

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha f_\varepsilon(x) &= \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) J_\varepsilon(x - y) dy \\ &= \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \frac{1}{\varepsilon^n} J\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \chi(y) (\partial_x^\alpha J)\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) dy \end{aligned}$$

于是，我们可以知道

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha f(x)| &\leq \varepsilon^{-|\alpha|} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| (\partial_x^\alpha J) \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right| dy \\
&= \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} |(\partial_x^\alpha J)(y)| dy = C\varepsilon^{-|\alpha|}
\end{aligned}$$

于是有, 对于截断函数 $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 满足

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ 0, & x \notin \Omega_2 \end{cases}$$

其中 $\Omega_1 \subset \Omega_2$, 并且 $\text{dist}(\Omega_1, \Omega_2) = d > 0$, 则有

$$|\nabla f(x)| \leq \frac{C}{d}$$

其中 C 只和 f 有关.

1.2.3 单位分解

(引理) Lem

设 X 为正规空间, $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq X$ 为开集, $\bigcup_{i \leq n} U_i = X$. 则存在开集 V_1, V_2, \dots, V_n 使得 $\bigcup_{i \leq n} V_i = X$ 并且对每个 $i \leq n$ 有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

证明:

只考虑 $n \geq 2$. 我们逐个构造 V_i .

闭集 $X \setminus \bigcup_{i \geq 2} U_i \subseteq U_1$. 由 X 正规, 取开集 V_1 使得 $X \setminus \bigcup_{i \geq 2} U_i \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$, 则 $V_1 \cup \bigcup_{i \geq 2} U_i = X$.

设 $1 \leq k \leq n-1$ 且已取定使得开集 V_1, V_2, \dots, V_k 满足 $\bigcup_{i \leq k} V_i \cup \bigcup_{i > k+1} U_i = X$ 并且对每个 $i \leq k$ 有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$, 则闭集 $X \setminus \left(\bigcup_{i < k} V_i \cup \bigcup_{i > k+2} U_i \right) \subseteq U_{k+1}$.

由 X 正规, 取开集 V_{k+1} 使得 $X \setminus \left(\bigcup_{i \leq k} V_i \cup \bigcup_{i \geq k+2} U_i \right) \subseteq V_{k+1} \subseteq \overline{V_{k+1}} \subseteq U_{k+1}$, 则 $\bigcup_{i < k+1} V_i \cup \bigcup_{i > k+2} U_i = X$.

这样便依次得到 V_1, V_2, \dots, V_n , 使得 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_i = X$ 并且对每个 $i \leq n$, 有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

(定理) 紧集上的单位分解

设 K 为 \mathbb{R}^n 中的紧集, U_1, \dots, U_k 为 K 的一个开覆盖, 则存在函数 $\eta_1 \in C_0^\infty(U_1), \dots, \eta_N \in C_0^\infty(U_N)$, 使得

$$(1) 0 \leq \eta_i(x) \leq 1, \forall x \in U_i, i = 1, \dots, N.$$

$$(2) \sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \forall x \in K.$$

证明:

因为 $K \subset \mathbb{R}^n$ 仍然正规, 由引理, 我们做出有限多个开集 D_1, \dots, D_N 使得 $D_i \subset \overline{D_i} \subset U_i$, 使得 $\{D_i\}_{i=1}^N$ 还是一个开覆盖.

由于 $D_i \subset\subset U_i$, 我们可以做出 D_i 的截断函数 $\zeta_i \in C_0^\infty(U_i)$, 使得 $\zeta_i(x) \geq 0$ 在 U_i 上成立, 并且在 D_i 上为正, 由于 $K \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$, 所以 $\sum_{i=1}^N \zeta_i(x) > 0, \forall x \in K$, 于是可以令

$$\eta_i(x) = \frac{\zeta_i(x)}{\sum_{i=1}^N \zeta_i(x)}$$

于是自然有 $\sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \forall x \in K$.

(引理) Lem

第二可数, 局部紧的 Hausdorff 空间存在一个紧穷竭, 即存在紧集 $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

证明:

令 X 为一个这样的空间, 由于 X 是一个局部紧 Hausdorff 空间, 所以存在一个预紧开集基, 再由第二可数性质知道存在可数的预紧开集基, 令 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ 为这个预紧开集基.

令 $K_1 = \overline{U_1}$, 下面归纳定义, 假设 K_1, \dots, K_k 满足 $U_j \subset K_j$, 并且 $K_{j-1} \subset K_j^\circ, j = 1, \dots, k$. 现在我们来定义 K_{k+1} , 由于 K_k 是紧的, 所以存在 m_k 使得 $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} U_j$, 令 $K_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{m_k} \overline{U_j}$, 并且满足 K_{k+1} 是紧集, 并且 $K_k \subset K_{k+1}^\circ$. 所以我们得到一个紧穷竭.

(定理) 一般情况的单位分解

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\{U_i\}_{i \in I}$ 为 Ω 的开覆盖, 一族 C_0^∞ 函数 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 称为从属于 $\{U_i\}_{i \in I}$ 的单位分解, 如果满足:

- (1) $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$
- (2) $\{\text{supp } \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $\{U_i\}_{i \in I}$ 的局部有限加细.
- (3) $\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) \equiv 1$.

证明:

由于 Ω 继承 \mathbb{R}^n 的拓扑, 知道 Ω 自然是一个第二可数的, 局部紧的 Hausdorff 空间, 所以存在一个紧穷竭 $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 此时有 $A_j - A_{j-1}^\circ$ 是紧集, $A_{j+1}^\circ - A_{j-2}$ 是开集, 有

$$A_j - A_{j-1}^\circ \subset\subset A_{j+1}^\circ - A_{j-2}$$

并且结合 $\{U_i \cap (A_{j+1}^\circ - A_{j-2}^\circ) \mid i \in I\}$ 为紧集 $B_j = A_j - A_{j-1}^\circ$ 的开覆盖, 所以我们可以做 B_j 从属于这个开覆盖的一个单位分解 $\Phi_j = \{\varphi_\alpha^{(j)}\}$.

对于任意的 $x \in \Omega$, 我们知道存在 j 使得 $x \in B_j$, 并且 $x \notin B_k$, 其中 $k \geq j+2$, 于是对于 Φ_k 中的 $\varphi_\alpha^{(k)}$, 有 $\varphi_\alpha^{(k)}(x) = 0$. 所以我们有

$$\sigma(x) := \sum_{\alpha, j} \varphi_\alpha^{(j)}(x)$$

在任意 x 附近都是有限和, 从而 $\sigma(x)$ 有意义, 令

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\sum_j \varphi_\alpha^{(j)}(x)}{\sigma(x)}$$

则 $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 即为我们所求单位分解.

证明:

另外证明, 这个证明可以把紧集上的单位分解延拓到全空间上, 是更有优势的.

证明:

$\forall x \in K, \exists W_k$ 是 x 的邻域。它的紧闭包, $\overline{W_k} \subseteq V_i$, 对于某个 i 。由于 K 是紧的, 所以, $\exists x_1, \dots, x_k \in K, K \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{W_{x_i}}$ 。

我们可以按照如下规则定义集合 J_i , $j \in J_i \Leftrightarrow \overline{W_{x_j}} \subseteq V_i$. $H_i = \bigcup_{j \in J_i} \overline{W_{x_j}}$ 。

H_i 紧, 且 $H_i \subseteq V_i$ (这也是我们取 J_i 的意义所在, 我们希望把找到的紧覆盖局限在 V_i 上) 是一个紧集合, 显然。由前一个引理, 知, 有光滑函数 g_i , 使得

$$0 \leq g_i \leq 1, \text{supp}(g_i) \subseteq V_i, g_i|_{H_i} = 1。$$

我们定义:

$$h_1 = g_1, h_2 = (1 - g_1)g_2, \dots, h_m = (1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_{m-1})g_m。$$
$$\text{Supp}(h_i) \subseteq V_i,$$

注意到 $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m H_i$

$$\sum_{i=1}^m h_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g_i(x)) \text{ 满足要求。}$$

定理的证明还是很有意思的。。其实不是很好想, 有一定组合的韵味。

2025-09-15

1.2.4 修正磨光法

由磨光算子的定义, 我们可以看出: 磨光函数在某点的值依赖于函数本身在这点附近的值. 因此当我们考虑, 用光滑函数在边界附近去逼近一给定函数时上面引进的磨光法并不合适. 为此, 我们可以先延拓给定的函数然后磨光, 有时也可以采用下面的修正磨光法(上面引进的磨光法也称为标准磨光法).

作为例子, 我们取区域为

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n\}$$

而考虑 Q 的顶边

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x_n = 1, |x_i| < 1, i = 1, \dots, n - 1\}$$

和底边

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x_n = -1, |x_i| < 1, i = 1, \dots, n - 1\}$$

附近的磨光.

(定义) Def

设 $u \in L^1(Q)$, 定义

$$J_\varepsilon^- u(x) = \int_Q j_\varepsilon(x_1 - y_1) \cdots j_\varepsilon(x_{n-1} - y_{n-1}) j_\varepsilon(x_n - y_n - 2\varepsilon) u(y) dy$$

$$J_\varepsilon^+ u(x) = \int_Q j_\varepsilon(x_1 - y_1) \cdots j_\varepsilon(x_{n-1} - y_{n-1}) j_\varepsilon(x_n - y_n + 2\varepsilon) u(y) dy$$

其中 $j_\varepsilon(\tau)$ 为一维磨光核.

容易验证, $J_\varepsilon^- u(x)$ 在 Q 的顶边上有定义, 而 $J_\varepsilon^+ u(x)$ 在 Q 的底边上有定义.

2025-09-17

1.2.5 区域边界的局部拉平

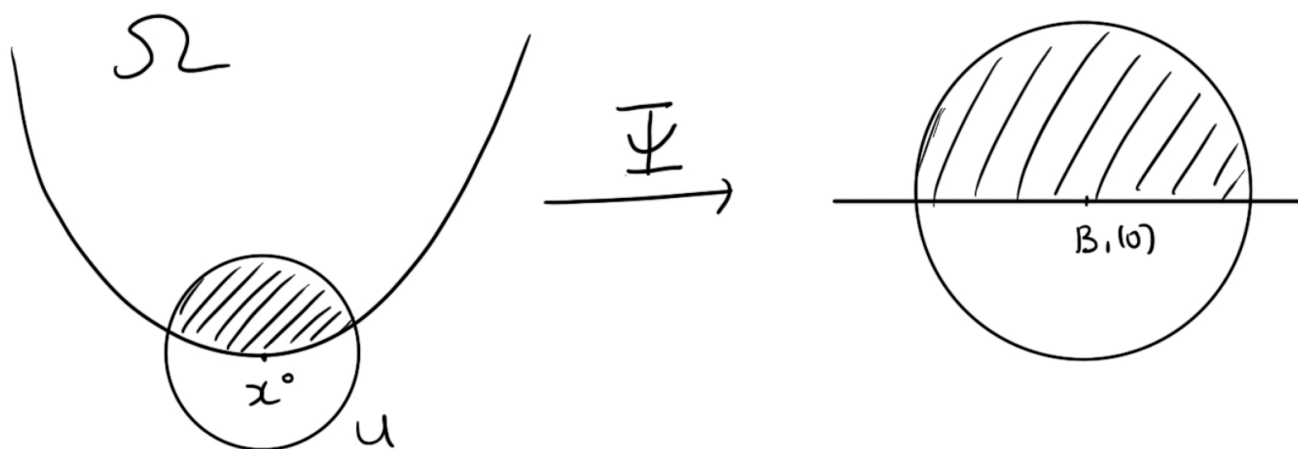
在边值问题中总是要讨论区域边界上的光滑性, 而边界上的光滑性一般是通过局部拉平来定义的:

(定义) Def

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界区域, 称 $\partial\Omega$ 具有 C^k 光滑性, 记为 $\partial\Omega \in C^k$, 如果对任意的 $x^0 \in \partial\Omega$, 存在 x^0 的一个邻域 U 和一个数域 C^k 的可逆映射 $\Psi: U \rightarrow B_1(0)$, 使得

$$\Psi(U \cap \Omega) = B_1^+(0) = \{y \in B_1(0), y_n > 0\}$$

$$\Psi(U \cap \partial\Omega) = \partial B_1^+(0) \cap \{y \in \mathbb{R}^n, y_n = 0\}$$



1.3 广义函数

1.3.1 基本定义

(定义) 试验函数空间

我们称 $C_0^\infty(\Omega)$ 为 Ω 上的光滑紧支集函数，函数序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中收敛到零定义为：

- (1) 存在一个紧集 $K \subset \Omega$ 使得 $\text{supp } \varphi_n \subset K$ 对所有 n 成立.
- (2) φ_n 的固定阶偏导对 x 一致收敛到 0 (不要求对阶数有一致性) .

$C_0^\infty(\Omega)$ 赋予上述收敛之后称为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 空间， $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的元素被称为**试验函数**.

笔记:

空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的 "D" 是 Distribution 的首字母，不过这里存在一个容易混淆但非常关键的点： $\mathcal{D}(\Omega)$ 空间本身并不是分布空间，而是**试验函数空间** (space of test functions)。它的命名源于它在定义“分布”时所起的关键作用。

"D" 来自于 Distribution 这个词。这个理论主要由法国数学家洛朗·施瓦茨 (Laurent Schwartz) 在20世纪40年代系统地建立起来。他将线性泛函作用于一个性质非常良好的函数空间 (即试验函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$) 上，从而定义出一种广义函数，他称之为“分布” (Distribution) 。

选择 "Distribution" 这个词，是因为这个概念推广了之前物理和数学中已经存在的、用于描述点电荷、偶极子等理想化物理量的“函数”。这些物理量在空间中的分布非常集中 (例如，点电荷只在一点上有“值”，其他地方都为零)，无法用传统的函数来描述，但可以用测度或一种“分布”来刻画。

施瓦茨的理论提供了一个严谨的数学框架来处理这些对象，其核心思想是：一个“广义函数” (分布) 的性质，完全由它如何作用于所有“试验函数”来确定。

我们不去直接定义一个分布 T 在某一点 x 的值 $T(x)$ ，而是定义它作用于一个试验函数 φ 后的值，记作 $\langle T, \varphi \rangle$ 。这个值是一个标量 (实数或复数) 。

$\mathcal{D}(\Omega)$ 空间被设计成一个“足够好”的函数空间，以确保作用于其上的线性泛函 (即分布) 具有良好的性质。前面给出的收敛定义非常严格，它保证了：

1. **紧支撑性**: 所有函数的“作用范围”都被限制在一个固定的紧集 K 内，这避免了无穷远处可能出现的麻烦。
2. **任意阶导数一致收敛**: 这个条件非常强，它保证了对分布进行求导、积分等运算时，结果依然是良好定义的。

因此，整个体系的逻辑是：

- 首先，我们定义一个非常“优秀”的**试验函数空间**，它具有我们期望的所有良好性质 (光滑、紧支撑)。这个空间我们称之为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 。
- 然后，我们定义这个空间上的所有连续线性泛函。这些泛函的集合，我们称之为**分布空间** (Space of Distributions)，记作 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 。

所以，虽然 $\mathcal{D}(\Omega)$ 本身是试验函数空间，但它的命名是为了构建分布 (Distribution) 理论，因此用 "D" 来标记它，以显示其与分布理论的紧密联系。你可以把它理解为 "Distribution-defining space" 或 "the domain for Distributions"。

(定义) Def

广义函数即 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函， l ，即有

(1) 对于实数或者复数 c_1, c_2 ，有

$$l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1l(\varphi_1) + c_2l(\varphi_2)$$

(2) 如果在 \mathcal{D} 中 $\varphi_j \rightarrow 0$ ，则 $l(\varphi_j) \rightarrow 0$ ，我们也常将 $l(\varphi)$ 写作 $\langle l, \varphi \rangle$ 。我们将所有广义函数构成的集合记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 。

我们常省略连续两字而简称为线性泛函，连续性有一个等价写法为：

(3) 对于任意的紧集 $K \subset \Omega$ ，必然存在常数 c 与非负整数 k 使得

$$|l(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K)$$

下面我们来说明 (2) 与 (3) 是等价的：

证明：

(3) 推 (2): 任取 $\varphi_m \rightarrow 0$ ，由定义我们知道存在紧集 $K \subset \Omega$ 使得对于所有的 m ，都有 $\text{supp } \varphi_m \subset K$ ，并且对于任意固定的 α ，有 $\partial^\alpha \varphi_m$ 在 K 上一致收敛到 0，即 $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_m| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_m(x)| \rightarrow 0$ ，所以由 (3) 自动有 $\langle l, \varphi_m \rangle \rightarrow 0$ 。

(2) 推 (3): 反证，假设不等式不成立，即存在某个紧集 K 使得对于任意常数 c 和整数 k ，都存在一个函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(K)$ 并且有

$$|l(\varphi)| > c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|$$

不妨令 $c = k = j$ ，从而有

$$|l(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|$$

用 $\frac{\varphi_j}{|\langle l, \varphi_j \rangle|}$ 替代 φ_j ，有

$$1 > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|$$

但是由于有

$$|\partial^\alpha \varphi_j| \leq \frac{1}{j}$$

对于任意的 $|\alpha| \leq j$ 成立，于是由定义我们知道 $\varphi_j \rightarrow 0$ ，但是我们知道 $\langle l, \varphi_j \rangle = 1$ ，也就是说 l 不是连续泛函，矛盾。

例子：正则广义函数

如果 $f(x)$ 是 Ω 上的局部可积函数，则对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

这个积分实际上是在 Ω 上的紧子集 $\text{supp } \varphi$ 上积分，因而是有意义的。所以我们知道每一个局部可积函数都可以生成一个线性泛函，我们记为 f ，这种广义函数称之为**正则广义函数**。

例子：Dirac 函数

我们定义 Dirac 函数 δ 为任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，使得

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

很容易证明这确实是一个线性泛函，也即广义函数，我们知道 δ 有一种奇异性，从而决不存在一个局部可积函数 f 按照上面积分的方式生成 δ ，所以广义函数确实推广了函数的概念，称正则广义函数以外的广义函数为**奇异广义函数**。

(定义) Def

如果对于一切的 $\varphi \in C_0^\infty(U)$ 都有 $\langle u, \varphi \rangle = 0$ ，则称广义函数 u 在 U 上为 0。

(定义) Def

广义函数 u 的支集 $\text{supp } u$ 是 u 在其上为 0 的最大开子集的余集，我们知道 $\text{supp } u$ 恒为闭集。

广义函数作为线性泛函，其线性运算，如加法与数乘的定义是自明的。

(定义) Def

两个广义函数 u_1, u_2 之差 $u_1 - u_2$ 若在 U 上为 0，则说明 u_1 与 u_2 在 u 上相等。

(定理) (局部化原理)

若 u 在 Ω 上为 0, 则其在 Ω 上的任一开子集上的限制为 0, 反过来如果 Ω 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 并且 $u|_{U_\alpha} = 0$ 对于任意的 α 成立, 则 $u = 0$.

证明:

前一部分是自明的, 现在我们来证明后一部分, 即广义函数实际上满足层的唯一性. 对于任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 令 $K = \text{supp } \varphi$, 则存在 $\{U_\alpha\}$ 的有限子覆盖 $\{U_1, \dots, U_k\}$, 我们作其单位分解 ψ_1, \dots, ψ_k , 有

$$\varphi = \varphi \sum_{j=1}^k \psi_j = \sum_{j=1}^k \varphi \psi_j = \sum_{j=1}^k \varphi_j, \quad \varphi_j = \varphi \psi_j$$

我们自然有 $\text{supp } \varphi_j \subset \text{supp } \psi_j \subset U_j$, 由于 $u|_{U_j} = 0$, 所以我们自然有

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^k \langle u, \varphi_j \rangle = 0$$

从而知道 $u = 0$.

2025-09-22

1.3.2 微分运算与乘子运算

广义函数的微分思想来自于紧支集光滑函数的分部积分公式, 考虑光滑函数 f 和光滑紧支集函数 φ , 有

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx$$

第二个等式是因为 $\varphi(x)$ 是紧支集的, 所以边界项是零, 现在我们可以借助这个想法来定义广义函数的导数.

(定义) Def

广义函数 $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 的导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 定义为

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

(定理) Thm

任何广义函数 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 可以微分任意多次, 并且有

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

(定义) Def

$a(x) \in C^\infty(\Omega)$ 称为一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 乘子, 可以对任一 $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 定义乘子运算 $a \cdot u$

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle$$

我们还可以定义其上的线性运算, 对于实数 c_1, c_2 , $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 定义

$$\langle c_1 f_1 + c_2 f_2, \varphi \rangle := c_1 \langle f_1, \varphi \rangle + c_2 \langle f_2, \varphi \rangle$$

对于 C^∞ 系数微分算子 $P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}
\langle P(x, \partial_x) f, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha f, \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle a_\alpha(x) \partial_x^\alpha f, \varphi \rangle \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial_x^\alpha f, a_\alpha(x) \varphi \rangle \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle \\
&= \left\langle f, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha \varphi) \right\rangle \\
&= \langle f, P^t(x, \partial_x) \varphi \rangle
\end{aligned}$$

其中 P^t 为 P 的转置算子, 如果硬要写的话就是 $P^t(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha(x) \cdot -)$.

 例子: Heaviside 函数:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

我们有

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0)$$

所以有

$$H'(x) = \delta(x)$$

在 $n > 1$ 维情况的推广为

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

则我们有

$$\frac{\partial^n H(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = \delta(x)$$

1.3.3 极限运算

设有一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 广义函数序列 $\{f_n\}$, 我们可以定义其收敛性

(定义) Def

在 \mathcal{D}' 中 $f_n \rightarrow f$ 是指对于任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

这样的收敛我们称之为弱*收敛.

(定理) Thm

设 $f_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f_n \rightarrow f$ 弱*收敛, 则对于任意固定的 α 有 $\partial^\alpha f_n \rightarrow \partial^\alpha f$ 弱star收敛.

证明:

证 任取 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 则由微商的定义

$$\langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

由假设 $f_n \rightarrow f$ (于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中), 而 $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 故上式右方之极限是 $(-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle,$$

而定理得证.

 例子: 逐点收敛极限和弱star极限

例如取 $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \end{cases}$, 我们求其逐点极限和弱星收敛极限.

逐点收敛的情况下，对于 $\forall x \neq 0$ ，显然有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = 0$ ，对于 $x = 0$ ，我们有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(0) = +\infty$ 。

对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty$ ，我们有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{2\varepsilon} dx = \varphi(0)$$

所以我们知道 f_ε 的弱星收敛极限是 Dirac 函数 δ 。

(定理) Thm

设 $\Phi_\varepsilon(x)$ 为磨光核，我们有 $\Phi_\varepsilon(x) \rightarrow \delta$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 意义下。

证明过程也是显然的。

定理 2.3.12. 设有 $C^\infty(\mathbf{R})$ 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 适合

(i) 对任意 $M > 0$, 当 $|a| < M, |b| < M$ 时

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq c,$$

c 只与 M 有关;

(ii) 固定 a 和 b 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b, \end{cases}$$

则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x).$$

证 令

$$F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(\xi) d\xi.$$

由条件(i), 在任一有界区间内 $F_n(x)$ 对 n 一致有界, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

利用著名的关于积分号下取极限的勒贝格控制收敛定理^①有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n(x) \varphi(x) dx \\ &= \int H(x) \varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

特别是

$$\begin{aligned} \langle f_n, \varphi \rangle &= \langle F_n', \varphi \rangle = - \langle F_n, \varphi' \rangle \rightarrow \\ &= - \langle H, \varphi' \rangle = \langle H', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

因此定理得证.

例3. $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}.$

利用 $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1$, 即可很容易看到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} = \delta(x).$$

这个结果在傅里叶级数理论中十分有用.

1.3.4 紧支集广义函数

1. 基本定义 我们要提出一个值得注意的事实： $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 原来是定义为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的泛函，但对于不一定具有紧支集的函数 φ ， $\langle u, \varphi \rangle$ 有时也可能是有意义的，只要 $K = \text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$ 为紧集即可。实际上，作一个截断函

数 $\alpha(x) \in C_0^\infty$ 使在 K 上 $\alpha(x) = 1$ ，则有

$$\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(x) + (1 - \alpha(x))\varphi(x).$$

第一项 $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$ ，因此 $\langle u, \alpha\varphi \rangle$ 有意义。第二项 $(1 - \alpha)\varphi$ 在 $\text{supp } u$ 附近恒为 0。因为在 $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$ 上， $1 - \alpha = 0$ 。在 $\text{supp } u \cap (\text{supp } \varphi \text{ 的余集})$ 上 $\varphi = 0$ ，所以

$$\langle u, (1 - \alpha)\varphi \rangle = 0.$$

今定义 $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \alpha\varphi \rangle$ 即可将 u 的作用推广到这种 φ 上去。可以证明，这样定义的 $\langle u, \varphi \rangle$ 之值与 α 的选取无关，所以这个定义是合理的。

按照这个说明可知，设 $K = \text{supp } u$ 为紧集， $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ，则 u 也可作为 $C^\infty(\Omega)$ 上的线性泛函，它的定义即为 $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \alpha\varphi \rangle$ ，其中 $\alpha(x)$ 为使在 K 上等于 1 的 $C_0^\infty(\Omega)$ 截断函数。上面已经说过，这个定义与 α 的选取无关。但是，为使这一线性形式连续，则需定义 $C^\infty(\Omega)$ 中的收敛性，即对 $C^\infty(\Omega)$ 赋以拓扑，下面的定义给出了这个拓扑。

定义 2.5.1. 空间 $\mathcal{E}(\Omega)$ 是对 $C^\infty(\Omega)$ 空间赋以下面规定的收敛性以后所成的空间： $\varphi_j(x) \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中即在任一紧集 $K \subset \Omega$ 中对任一选定的重指标 α ， $\partial^\alpha \varphi_j(x)$ 皆为一致收敛于 0。 $\mathcal{E}(\Omega)$ 上的线性连续泛函之集记作 $\mathcal{E}'(\Omega)$ ，其元即称为 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 广义函数。这些泛函的连续性（即当 $\varphi_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}(\Omega)$ 时，有 $\langle u, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$ ， $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ ）等价于下面的形式表述：存在常数 C ，整数 $m \geq 0$ 以及紧集 $K \subset \Omega$ 使

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{E}(\Omega). \quad (49)$$

定理 2.5.2. $\mathcal{E}'(\Omega) = \{u; u \in \mathcal{D}'(\Omega), \text{supp } u \subset\subset \Omega\}$.

证 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 且 $\text{supp } u$ 为紧, 则可取 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, 且 $\chi(x) = 1$ 于 $\text{supp } u$ 的某个邻域上, 记 $K = \text{supp } \chi$, 对任意 $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, 由(23), 有

$$\begin{aligned} |\langle u, \varphi \rangle| &= |\langle u, \chi\varphi \rangle| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha(\chi\varphi)| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha\varphi|, \end{aligned} \quad (50)$$

因此 $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

反之, 若 $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, 因此自然地有 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 今证 $\text{supp } u$ 为紧. 用反证法. 设 $\text{supp } u$ 非紧, 因而无界(紧集即有界闭集, 所以 $\text{supp } u$ 非紧时必为无界), 所以一定有 $\varphi_j(x) \in \mathcal{E}(\Omega)$, 而 $\text{supp } \varphi_j \subset \text{supp } u \cap \{x; |x| > j\}$, 使 $\langle u, \varphi_j \rangle \neq 0$. 同时, 不妨设 $\langle u, \varphi_j \rangle = 1$. 但若取任一紧集 $K \subset \Omega$, 必有正整数 N 使 $K \subset \{x; |x| \leq N\}$. 所以凡 $j > N$ 必有 $\varphi_j \equiv 0$ 于 K 中, 即知 $\varphi_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中, 而应有 $\langle u, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$, 这与 $\langle u, \varphi_j \rangle = 1$ 矛盾. 所以 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 之元必为 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 之元而有紧支集者. 证毕.

由此可知 $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. 所以, 前面各节中所讲的关于广义函数的运算、性质等等对于 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 之元也都成立. 又 $u_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 中即对于任意 $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, 皆有 $\langle u_j, \varphi \rangle \rightarrow 0$. 但 $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$, 所以对任一个 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 也有 $\langle u_j, \varphi \rangle \rightarrow 0$. 所以又有 $u_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中. 所以不但作为一个集合 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 包含于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中而且 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 中的极限关系在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中也得以保持(所以前述 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的极限的性质对 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 依然成立), 这种情况称为 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 连续嵌入在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中, 记作

$$\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \quad (51)$$

定理 2.5.3. 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω 及 Ω_1 为 \mathbf{R}^n 中的开集, 且 $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, 则可以找到一个支集在 $\overline{\Omega_1}$ 的某一邻域中的连续函数 f 和整数 $m \geq 0$, 使得在 Ω_1 上

$$u = \frac{\partial^{mf}}{\partial x_1^m \cdots \partial x_n^m}. \quad (52)$$

定理 2.5.4. 对 $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ 必可找到若干个连续函数 f_α 使在 Ω 上

$$u = \sum_{|\alpha| \leq r} \partial^\alpha f_\alpha(x). \quad (54)$$

定理 2.5.3 中的偏导是广义函数意义的偏导, 即

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle f, \frac{\partial^{mn} \varphi}{\partial x_1^m \cdots \partial x_n^n} \right\rangle$$

定理 2.5.5. 若 $\text{supp } u = \{0\}$, 则 u 必可表示为 $\delta(x)$ 及其微商的有限线性组合.

证 设 u 的阶数为 $k (< +\infty)$, 若 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω 为原点的一个邻域, 由泰勒公式,

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) \cdot x^\alpha + \eta(x),$$

其中 $\eta \in C^\infty$ 满足 $\partial^\alpha \eta(0) = 0$, $|\alpha| \leq k$. 我们可证明 $u(\eta) = 0$, 于是

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle \delta, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

其中 $a_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} u(x^\alpha)$, 这意味着

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \delta^{(\alpha)}.$$

下面证明 $u(\eta) = 0$, 令 $\chi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且当 $|x| \leq \epsilon$ 时 $\chi_\epsilon(x) = 1$, 当 $|x| \geq 3\epsilon$ 时 $\chi_\epsilon(x) = 0$, 则当 $|x| < \epsilon$ 时, $\eta(1 - \chi_\epsilon) = 0$, 但 $\text{supp } u = \{0\}$, 使得 $\langle u, \eta(1 - \chi_\epsilon) \rangle = 0$, 所以 $\langle u, \eta \rangle = \langle u, \eta \chi_\epsilon \rangle$, 因此

$$|\langle u, \eta \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha (\eta \chi_\epsilon)|,$$

按莱布尼茨公式, $\partial^\alpha (\eta \chi_\epsilon) = \sum_{d' \leq \alpha} c \partial^{\alpha-d'} \eta \partial^{d'} \chi_\epsilon$, 且当 $|\alpha| \leq k$, $|x| \leq 3\epsilon$ 时,

$$|\partial^\alpha \chi_\epsilon(x)| \leq C_\alpha \epsilon^{-|\alpha|}, \quad |\partial^\alpha \eta(x)| \leq C'_\alpha \epsilon^{k+1-|\alpha|},$$

$$|\langle u, \eta \rangle| \leq C' \epsilon,$$

其中 C' 与 ϵ 无关 ($\epsilon < 1$), 由 ϵ 的任意性可得到 $|\langle u, \eta \rangle| = 0$, 即 $\langle u, \eta \rangle = 0$.

1.3.5 广义函数与函数的卷积

(定义) Def

给定 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或者 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), 则可以定义 f, g 的卷积为

$$(f * g)(x) := \langle f(\bullet), g(x - \bullet) \rangle$$

一个重要的例子是对于 Dirac 函数 δ , 有

$$(\delta * f)(x) = \langle \delta, f(x - \bullet) \rangle = f(x)$$

需要注意的是, 函数与广义函数的卷积不是交换的!

(引理) Lem

设 $\omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开集, $\varphi(x, y) \in C^\infty(\Omega \times \omega)$ 且有紧集 $K \subset \Omega$ 使得当 $x \notin K$ 时有 $\varphi(x, y) = 0$ 对于任意的 $y \in \omega$ 成立. 如果 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 则函数

$$y \mapsto \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle$$

是一个 C^∞ 函数, 并且有

$$\partial_y^\alpha \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle = \langle u, \partial_y^\alpha \varphi(\bullet, y) \rangle$$

证明:

证 对固定 $y \in \omega$, $\varphi(\bullet, y) \in C_0^\infty(\Omega)$, 它关于 y 的泰勒展开式是

$$\varphi(x, y + h) = \varphi(x, y) + \sum_{j=1}^m h_j \partial_{y_j} \varphi(x, y) + \psi(x, y, h),$$

其中 $\psi(\bullet, y, h) \in C_0^\infty(\Omega)$, 且

$$\sup_x |\partial_x^\alpha \psi(x, y, h)| = O(|h|^2), \quad \text{当 } h \rightarrow 0, \forall \alpha.$$

因为 $|\langle u, \psi(\bullet, y, h) \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_x |\partial_x^\alpha \psi(x, y, h)|$, 故 $\langle u, \psi(\bullet, y, h) \rangle = O(|h|^2)$. 所以

$$\langle u, \varphi(\bullet, y + h) \rangle = \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle$$

$$+ \sum h_j \langle u, \partial_{y_j} \varphi(\bullet, y) \rangle + O(|h|^2),$$

故函数 $\langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle$ 是可微的, 且有

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle = \langle u, \partial_{y_j} \varphi(\bullet, y) \rangle,$$

用归纳法便可证明(2).

(定理) Thm

如果 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或者 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), 则

(1) $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$(2) \text{supp } f * \varphi \subset \text{supp } f + \text{supp } \varphi.$$

$$(3) \partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g = (\partial^\alpha f) * g$$

证明:

(1) 由上面引理是显然的.

(2) 设 $x \notin \text{supp } f + \text{supp } \varphi$, 则很显然不存在 y 使得 $y \in \text{supp } f$ 并且 $x - y \in \text{supp } \varphi$, 也就是说 $\text{supp } \varphi(x - \bullet) = x - \text{supp } \varphi$, 也就是说 $\text{supp } \varphi(x - \bullet) \cap \text{supp } f = \emptyset$, 所以

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, \varphi(x - \bullet) \rangle = 0$$

所以我们有 $\text{supp } f * \varphi \subset \text{supp } f + \text{supp } \varphi$.

(3) 由上面的引理, 我们知道

$$\partial^\alpha(f * \varphi)(x) = \partial^\alpha \langle f, \varphi(x - \bullet) \rangle = \langle f, \partial^\alpha \varphi(x - \bullet) \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi(x - \bullet) \rangle$$

所以成立, 由此我们甚至有, 如果 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 则

$$\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} \varphi)$$

下面我们尝试说明卷积的运算是结合的, 为此需要先介绍一个引理:

引理 3.1.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开集, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \omega)$ 且 $\text{supp } \varphi \subset K_1 \times K_2$, 这里 $K_1 \subset \Omega$, $K_2 \subset \omega$ 为紧集, 如果 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 则

$$\int \langle u, \varphi(\cdot, y) \rangle dy = \langle u, \int \varphi(\cdot, y) dy \rangle. \quad (5)$$

证 由引理 3.1.2 知 $\langle u, \varphi(\cdot, y) \rangle$ 是光滑函数, 且其支集含于 K_2 , 所以是可积的. 为简便计可扩展 K_2 为 m 维正方体 \tilde{K}_2 , 则积分可取在 \tilde{K}_2 上. 等分 \tilde{K}_2 为边长为 h 的小正方体, 可作黎曼和

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \langle u, \varphi(\cdot, kh) \rangle h^m = \langle u, \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \varphi(\cdot, kh) h^m \rangle,$$

令 $h \rightarrow 0$, 则一方面 $\sum \langle u, \varphi(\cdot, kh) \rangle h^m \rightarrow \int \langle u, \varphi(\cdot, y) \rangle dy$. 另一方面

$$\psi_h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \varphi(\cdot, kh) h^m \rightarrow \int \varphi(x, y) dy,$$

不但如此，还可证明这里的收敛性是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的收敛性. 这首先是因为 $\text{supp } \psi_h$ 及 $\text{supp } \int \varphi(x, y) dy$ 都包含在 K_1 内, $\varphi(x, y)$ 在 $K_1 \times K_2$ 上是一致连续的, 因此, 上式的收敛性关于 x 是一致的, 此外对任意重指标 α 又可证明当 $h \rightarrow 0$ 时, 对 $x \in K_1$ 一致地有

$$\partial^\alpha \psi_h(x) \rightarrow \int \partial_x^\alpha \varphi(x, y) dy .$$

于是知道上式是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的收敛性, 所以(5)式成立, 作为一个习题, 请读者详细写出这个证明.

笔记:

这里由于 f 是连续线性泛函, 我们可以这样子理解他:

$$\int \langle f, \varphi(x) \rangle \psi(x) dx = \lim \sum \langle f, \varphi(x_i) \rangle \psi(x_i) \Delta x_i = \lim \left\langle f, \sum \varphi(x_i) \psi(x_i) \Delta x_i \right\rangle = \left\langle f, \int \varphi(x) \psi(x) dx \right\rangle$$

(定理) DCC 式的卷积是结合的

若 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$(f * \psi) * \varphi = f * (\psi * \varphi)$$

证明:

证 $f * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi * \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} ((f * \psi) * \varphi)(x) &= \int \langle f(\cdot), \psi(z - \cdot) \rangle \varphi(x - z) dz \\ &= \langle f(\cdot), \int \psi(z - \cdot) \varphi(x - z) dz \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \int \psi(x - u - \cdot) \varphi(u) du \rangle \\ &= \langle f(\cdot), (\psi * \varphi)(x - \cdot) \rangle \\ &= (f * (\psi * \varphi))(x) . \end{aligned}$$

1.3.6 广义函数的正则化

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, Φ_ε 为磨光核, 则 $f_\varepsilon = f * \Phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 意义下收敛到 f .

证明:

任取磨光核 $\varphi_\varepsilon(x)$, 我们定义反射 $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, 现在任取 $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 对于任一广义函数 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 有

$$(T * \psi)(0) = \langle T(\bullet), \psi(-\bullet) \rangle = \langle T, \check{\psi} \rangle$$

所以我们有

$$\begin{aligned} \langle f * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle &= ((f * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi})(0) \\ &= (f * (\varphi_\varepsilon * \check{\psi}))(0) \\ &= \langle f, \varphi_\varepsilon * \check{\psi} \rangle \\ &= \langle f, \check{\varphi}_\varepsilon * \psi \rangle \end{aligned}$$

由于 $\check{\varphi}_\varepsilon$ 仍然是磨光核, 所以我们知道在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 中有

$$\check{\varphi}_\varepsilon * \psi \rightarrow \psi$$

从而我们有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, \check{\varphi}_\varepsilon * \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle$$

从而我们知道有 $f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f$.

2025-09-22

1.3.7 广义函数与广义函数的卷积

1. 两个广义函数卷积的定义 首先说明一下, 广义函数作为 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的泛函, 即 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle u, \varphi \rangle$ 确定为一实数(或复数), 且若 $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使 $\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$, 则 $u_1 = u_2$. 但我们还可以用卷积给出 $u_1 = u_2$ 的另一种条件. 利用定义 3.1.1 知道对于 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle u, \varphi \rangle = (u * \check{\varphi})(0). \quad (7)$$

所以对于 $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 可从等式

$$u_1 * \varphi = u_2 * \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

推出 $u_1 = u_2$.

两个广义函数卷积的定义，可由 \mathcal{D}' 广义函数与 C_0^∞ 函数卷积定义推广而得。如果 $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $g, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 则由定义 3.1.1 及定理 3.1.5 知

$$\begin{aligned} \langle (f * g), \varphi \rangle &= ((f * g) * \check{\varphi})(0) \\ &= (f * (g * \check{\varphi}))(0) \\ &= \langle f, (g * \check{\varphi})^\vee \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \left(\int g(y) \varphi(y - \cdot) dy \right)^\vee \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \int g(y) \varphi(y + \cdot) dy \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \langle g(y), \varphi(y + \cdot) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

但是此式右方即使 g 不是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数也可以有定义。于是，我们可利用这

笔记:

我们梳理一下这个技术，就是考虑 $(f * \varphi)(0) = \langle f, \varphi(-x) \rangle_x = \langle f, \check{\varphi} \rangle$ ，那如果把 0 换成别的呢？我们有

$$(f * \varphi)(-x) = \langle f, \varphi(-x - y) \rangle_y = \langle f, \check{\varphi}(x + y) \rangle_y$$

我们把这个式子反过来使用，就是

$$\langle f, \varphi(x + y) \rangle_y = (f * \check{\varphi})(-x)$$

(定义) Def

设 $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{E}'$, 则我们可以定义

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x + y) \rangle_y \rangle_x$$

现在我们要说明定义3.2.1之合理性, 即证明(8)右方确实定义了 $\varphi \in \mathcal{D}$ 的一个连续线性泛函. 由定义3.1.1知 $\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle = (g * \check{\varphi})(-x)$, 由定理3.1.3知 $(g * \check{\varphi})(-x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 因此(8)右端有意义, 且显然 $\langle f * g, \varphi \rangle$ 关于 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是线性的, 若 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ 中), 即 $\text{supp } \varphi_j \subset K$ (紧集), 且 φ_j 在 K 上一致地收敛于0, 记 $\psi_j(x) = (g * \varphi_j)(-x)$, 则由定理3.1.3

$$\text{supp } \psi_j \subset K + \text{supp } g,$$

故 $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 很容易证明对一切重指标 α , 有 $\partial^\alpha \psi_j(x)$ 关于 x 一致收敛于0. 即 $\psi_j(x) = \langle g(y), \varphi_j(x+y) \rangle \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ 中). 因此 $\langle f(x), \psi_j(x) \rangle \rightarrow 0$, 即有

$$\langle f * g, \varphi_j \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi_j(x+y) \rangle \rangle \rightarrow 0.$$

这就证明了 $f * g$ 是 $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ 上的连续线性泛函, 即 $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

类似地, 当 $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ 时, 用(8)仍可以定义 $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

总之要注意, f 与 g 中至少有一个有紧支集. 对两个一般的 $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ 不能一般地定义其卷积, 但在有些特定情况下, $f * g$ 仍有定义.

(性质) 卷积代数

广义函数卷积的性质, 卷积代数: 设 $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, 且其中至少有两个具有紧支集, 则

- (1) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (2) $f * g = g * f$
- (3) $\text{supp } (f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g$
- (4) $f * \delta = \delta * f = f$
- (5) $\partial^\alpha (f * g) = (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} g), \quad \forall \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
- (6) 卷积运算关于每个因子都是线性的.

证明:

证 1) 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned} \langle f * (g * h), \varphi \rangle &= \langle f(x), \langle (g * h)(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle f(x), \langle g(y), \langle h(z), \varphi(x+y+z) \rangle \rangle \rangle \\ &= \langle (f * g)(x), \langle h(z), \varphi(x+z) \rangle \rangle \\ &= \langle (f * g) * h, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

这里等式每一步都用到(8)或定理3.1.3的1), 2). 由它们可得 $\langle h(z), \varphi(x+$

$y+z) \in C^\infty$ (当 $h \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ 时), 或 $\langle h(z), \varphi(x+y+z) \rangle \in C^\infty$ (当 $h \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ 时).

2) 对于任意 $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 由(6)及连续函数卷积的可交换性与1), 有

$$\begin{aligned} ((f * g) * \varphi) * \psi &= (f * g) * (\varphi * \psi) = (f * g) * (\psi * \varphi) \\ &= ((f * g) * \psi) * \varphi = (f * (g * \psi)) * \varphi \\ &= f * ((g * \psi) * \varphi) = f * (\varphi * (g * \psi)) \\ &= (f * \varphi) * (g * \psi) = (g * \psi) * (f * \varphi) \\ &= g * (\psi * (f * \varphi)) = g * ((f * \varphi) * \psi) \\ &= (g * f) * (\varphi * \psi) = ((g * f) * \varphi) * \psi, \end{aligned}$$

于是有

$$(f * g) * \varphi = (g * f) * \varphi.$$

所以 $f * g = g * f$.

3) 对任意其支集包含在 $\text{supp } f + \text{supp } g$ 的余集中的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 它满足 $\text{supp } \varphi \cap (\text{supp } f + \text{supp } g) = \emptyset$, 于是有 $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = 0$ (事实上, 对 $x \in \text{supp } f$, 或者 $y \in \text{supp } g$, 有 $\varphi(x+y) = 0$, 或者 $y \in \overline{\text{supp } g}$, 都可得 $\langle g(y), \varphi(x+y) \rangle = 0$). 因此 $f * g$ 在 $\text{supp } f + \text{supp } g$ 的余集上为零. 所以

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g.$$

4) 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

即 $f * \delta = f$, 由2)知 $\delta * f = f * \delta = f$.

5) 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 应用广义函数微商的定义及引理3.1.2可得

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha (f * g), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle f * g, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \langle g(y), \partial^\alpha \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|} \langle f(x), (-1)^{|\alpha_2|} \langle g(y), \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|} \langle f(x), \langle \partial^{\alpha_2} g(y), \partial_x^{\alpha_1} \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|} \langle f(x), \partial_x^{\alpha_1} \langle \partial^{\alpha_2} g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle \partial^{\alpha_1} f(x), \langle \partial^{\alpha_2} g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} g), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

所以5)成立.

6) 是显然的.

上述卷积运算 $*$ 的结合律、交换律及(12)使得广义函数(严格讲是紧支集的)在卷积运算下成为一个有单位元的代数, 其单位元为 δ 函数, 称其为卷积代数.

书上这个 (3) 的证明是错误的, 因为你要说明 $\text{supp } f \cap \text{supp } \psi = \emptyset$, 其中 $\psi = \langle g, \varphi(x+y) \rangle_y$, 但是书上的证明是无法弥补的, 他只能说明支集的内部不交, 边界相交的情况按照这个证明方法很难说明. 我们可以采取另外一种方式, 见 [slfc 2025-09-22 and 09-24 作业](#)

1.4 傅里叶变换

我们回忆一下一般而言的 Fourier 变换是什么, 给定 $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, f 的 Fourier 变换为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

1.4.1 速降函数空间 \mathcal{S}

(定义) Def

速降空间, 又叫 Schwartz 空间, 记为 \mathcal{S} , 而所有满足以下条件的函数 $f(x)$ 的空间: 对于任意的重指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, 存在常数 $c(\alpha, \beta) \geq 0$ 使得

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq c(\alpha, \beta)$$

$f_j(x)$ 在 \mathcal{S} 中趋于 0, 是指对于固定的 α, β , 有

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)| \rightarrow 0$$

由定义直接可知, \mathcal{S} 中之元连同其各阶微商在 ∞ 处皆以高于任意次多项式倒数的阶趋于 0, 所以 \mathcal{S} 空间也称为急减函数空间.

由定义直接可以看到, 取任意多项式 $Q(x)$ 和常系数偏微分算子 $P(D)$, 都有

$$Q(x)P(D)\mathcal{S} \subset \mathcal{S},$$

及

$$P(D)Q(x)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}.$$

⚠ 注意:

我更喜欢用速降而不是急减.

(定义) Def

对于 $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, 请以其 Fourier 变换为

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx$$

由于 $\varphi(x)$ 在 ∞ 处速降, 所以上面的积分是收敛的, 我们来证明一下:

(引理) Lem

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1.$$

证明:

由定义, 我们知道存在 $C > 0$, 使得 $\sup |x^\alpha \varphi(x)| \leq C$, 也就是说 $|\varphi(x)| \leq \frac{C}{|x^\alpha|}$, 我们取充分大的 α 使得 $\frac{C}{|x^\alpha|}$ 在 $\mathbb{R}^n - B(0, 1)$ 上是可积的, 于是我们知道

$$\int |\varphi| dx = \int_{B(0,1)} |\varphi| dx + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} |\varphi| dx \leq C_1 + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \frac{C}{|x^\alpha|} dx < \infty$$

实际上这个玩意还能加强, 即

(定理) Thm

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^p (\infty > p \geq 1)$$

证明:

证明和 $p = 1$ 的情况是完全一样的.

我们定义 $D_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j}$

(定理) Thm

$\varphi \in \mathcal{S}$, 记其 Fourier 变换为 $F: \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, 而且

$$F(D^\alpha \varphi)(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \quad F(x^\alpha \varphi)(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$$

证明:

证 由于 $\varphi(x)$ 急减, 我们可以在积分号下求微商, 也可以作分部积分而且积分号外之项为 0, 所以

$$\begin{aligned} \int e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha \varphi(x) dx &= \int [(-D_x)^\alpha e^{-ix \cdot \xi}] \varphi(x) dx \\ &= \int \left[\left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \right] \varphi(x) dx \\ &= \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

又因为 $x_j e^{-ix \cdot \xi} = -D_{\xi_j} e^{-ix \cdot \xi}$, 所以

$$\begin{aligned} \int e^{-ix \cdot \xi} x^\alpha \varphi(x) dx &= \int (-D_\xi)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= (-D_\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

最后,

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha D_\xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| &= \left| \int e^{-ix \cdot \xi} D_x^\alpha [(-x)^\beta \varphi(x)] dx \right| \\ &\leq \int |(1 + |x|^2)^{-(n+1)/2} (1 + |x|^2)^{(n+1)/2} D_x^\alpha [(-x)^\beta \varphi(x)]| dx \\ &\leq C \sup_{\mathbf{R}^n} |(1 + |x|^2)^{(n+1)/2} D_x^\alpha [(-x)^\beta \varphi(x)]| < \infty. \end{aligned}$$

所以 F 映 \mathcal{S} 中之元到 \mathcal{S} 中, 而且由 \mathcal{S} 中趋于 0 的定义, $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 是连续的, 这一点留作习题.

(引理) Lem

我们有 $\int e^{-ix \cdot \xi} e^{-|x|^2/2} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-|\xi|^2/2}$

证明:

证 因为

$$-ix \cdot \xi - |x|^2/2 = -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n x_j (i\xi_j) + \sum_{j=1}^n (i\xi_j)^2 \right) - \frac{1}{2} |\xi|^2,$$

所以

$$\int e^{-ix \cdot \xi} e^{-|x|^2/2} dx = e^{-|\xi|^2/2} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_j + i\xi_j)^2/2} dx_j.$$

对积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_j + i\xi_j)^2/2} dx_j$, 应用柯西定理来改变积分路径如图 4-1, 即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_j + i\xi_j)^2/2} dx_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2/2} dx_j = \sqrt{2\pi}.$$

于是(8)得证.

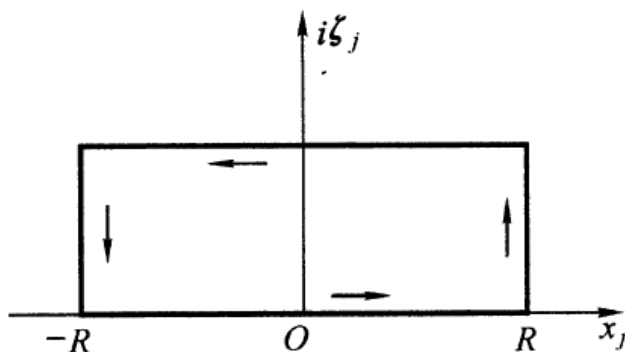


图 4-1

例子: Gauss 函数

我们称 $g(x) = e^{-|x|^2/2}$ 为 Gauss 函数, 这个函数的特点是其傅里叶变换就是自身(差一个常数因子).

2025-09-29

(定理) Thm

$F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 有连续的逆映射 $F^{-1}: \widehat{\varphi} \mapsto \varphi$, 由下式给出

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

证明:

证 取上述高斯函数 $g(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ 有

$$\begin{aligned}\int \hat{\varphi}(\xi) g(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi &= \int g(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \int \varphi(y) e^{-iy \cdot \xi} dy \\ &= \iint e^{i\xi \cdot (x-y)} g(\xi) \varphi(y) dy d\xi \\ &= \int \varphi(y) dy \int g(\xi) e^{-i(y-x) \cdot \xi} d\xi \\ &= \int \varphi(y) \hat{g}(y-x) dy \\ &= \int \hat{g}(y) \varphi(x+y) dy.\end{aligned}$$

用 $g(\varepsilon\xi)$ ($\varepsilon > 0$) 代替 $g(\xi)$, 则 $\hat{g}(y)$ 应改为 $\varepsilon^{-n} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$ (见下面的(12)式), 令 $y = \varepsilon y_1$ 代入上式有

$$\int \hat{\varphi}(\xi) g(\varepsilon\xi) e^{i\varepsilon\xi \cdot x} d\xi = \int \hat{g}(y_1) \varphi(x + \varepsilon y_1) dy_1.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$g(0) \int \hat{\varphi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \varphi(x) \int \hat{g}(y_1) dy_1 = (2\pi)^n \varphi(x).$$

这里用到了引理 4.1.4 知 $\hat{g}(y_1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-|y_1|^2/2}$, 又 $\int e^{-|y_1|^2/2} dy_1 = (2\pi)^{n/2}$,

所以 $\int \hat{g}(y_1) dy_1 = (2\pi)^n$. 因为 $g(0) = 1$, 于是定理得证.

下面讨论傅里叶变换的性质, 有一些明显的性质作为习题.

1) 傅里叶变换与反射:

$$F: \check{\varphi} \mapsto F(\check{\varphi})(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(-x) dx = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi). \quad (10)$$

2) 傅里叶变换与平移:

$$F: \tau_h \varphi \mapsto F(\tau_h \varphi)(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x - h) dx = e^{-ih \cdot \xi} F(\varphi)(\xi). \quad (11)$$

3) 傅里叶变换与相似变换:

$$\begin{aligned} F: \varphi(cx) \mapsto F(\varphi(c \cdot))(\xi) \\ &= \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(cx) dx \\ &= |c|^{-n} F(\varphi)\left(\frac{\xi}{c}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $F(\varphi(c \cdot))(\xi)$ 表示先将 φ 之自变量乘以 c 再作傅里叶变换, 即

$$F(\varphi(c \cdot))(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(cx) dx.$$

4) 傅里叶变换与非奇异线性变换: 设 $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则由 $y = Ax$ 及 $x = A^{-1}y$ 有

$$\begin{aligned} F: \varphi(Ax) \mapsto F(\varphi(A \cdot))(\xi) &= \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(Ax) dx \\ &= \int e^{-i(A^{-1}y) \cdot \xi} \varphi(y) dy \quad (y = Ax) \\ &= |\det A|^{-1} \int e^{-i\langle y, {}^t A^{-1} \xi \rangle} \varphi(y) dy \\ &= F(\varphi)({}^t A^{-1} \xi) \cdot |\det A|^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

这里我们用到了线性代数中关于内积记号及双线性形式的一个公式: 若线性变换 B 的表示矩阵为 (b_{ij}) , 则

$$\begin{aligned} (By) \cdot \xi &\triangleq \langle By, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_i \xi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} \xi_j \right) y_i = \langle y, {}^t B \xi \rangle. \end{aligned}$$

5) 傅里叶变换与微分运算: 傅里叶变换把微分运算变成为乘运算, 它也把乘法运算变成为微分运算, 即对 $f \in \mathcal{S}$ 及任意重指标 α 有

$$\begin{aligned} F(D^\alpha f)(\xi) &= \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \\ F(x^\alpha f(x))(\xi) &= (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

我们还有结论：速降函数的卷积的偏导可以乱放，即如果 $f, g \in \mathcal{S}$ ，则有

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$$

(定理) Thm

若 $f, g \in \mathcal{S}$ ，则 $f * g \in \mathcal{S}$ ，并且

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

证明：

证 $(f * g)^\wedge(\xi)$ 其实是一个逐次积分

$$\int e^{-ix \cdot \xi} dx \int f(y) g(x - y) dy .$$

因为 f, g 都急减，所以另一个逐次积分 $\int f(y) dy \int g(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx$ 是存在的。因此，由数学分析中的定理，这两个逐次积分相等：

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int f(y) dy \int g(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int f(y) dy \int g(x - y) e^{-i(x-y) \cdot \xi} e^{-iy \cdot \xi} dx \\ &= \int e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy \int g(t) e^{-it \cdot \xi} dt \quad (t = x - y) \\ &= \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi) . \end{aligned}$$

因为两个 \mathcal{S} 函数之积仍为 \mathcal{S} 函数，所以 $(f * g)^\wedge \in \mathcal{S}$ 。又因为傅里叶变换是由 \mathcal{S} 到 \mathcal{S} 的线性同构，所以 $(f * g) \in \mathcal{S}$ 。定理得证。

(推论) Cor

我们有 $\widehat{f \cdot g}(\xi) = (2\pi)^{-n} (\widehat{f * g})(\xi)$

证明：

由于 $f \cdot g \in \mathcal{S}$, 所以 $f, g \in \mathcal{S}$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\widehat{f \cdot g}(\xi) &= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)g(x)dx \\ &= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)\mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(x)dx \\ &= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)dx(2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \eta} \hat{g}(\eta)d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\eta)d\eta \int e^{-ix \cdot (\xi - \eta)} f(x)dx \\ &= (2\pi)^n \int \hat{g}(\eta)\hat{f}(\xi - \eta)d\eta \\ &= (2\pi)^n (\hat{f} * \hat{g})(\xi)\end{aligned}$$

下面我们证明 Parseval 等式!!!!

(定理) Parseval 等式

如果 $f, g \in \mathcal{S}$, 则有

$$\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \hat{g} \rangle$$

如果令 $(f, g) = \int f\bar{g}dx$, 则有

$$(f, g) = (2\pi)^{-n}(\hat{f}, \hat{g})$$

证明:

证 将绝对收敛的二重积分化为逐次积分有

$$\begin{aligned}\iint f(\xi)g(x)e^{-ix \cdot \xi} dx d\xi &= \int g(x)dx \int e^{-ix \cdot \xi} f(\xi)d\xi \\ &= \int f(\xi)d\xi \int g(x)e^{-ix \cdot \xi} dx.\end{aligned}$$

后两个式子即为 $\langle \hat{f}, g \rangle$ 和 $\langle f, \hat{g} \rangle$.

同样

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n}(\hat{f}, \hat{g}) &= (2\pi)^{-n} \iint f(x) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-ix \cdot \xi} dx d\xi \\ &= \int f(x) dx \cdot (2\pi)^{-n} \int \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \int f(x) dx \overline{(2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi} = (f, g).\end{aligned}$$

! 警告:

我不是很明白这张黑板在些什么, 自行领悟吧.

The chalkboard shows the following derivation:

$$\begin{aligned}\text{易证 } \sigma(\xi) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi). \\ \text{故有 } P(\alpha, D_x) &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \sigma(\xi) F_{x \rightarrow \xi} &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D_x^\alpha \varphi(x)) \hat{(\xi)}. \\ \text{注: } \varphi \in \mathcal{S} \text{ 且 } \varphi(x) \in \text{SUR}^n & &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \cdot F_{\xi \rightarrow x}^{-1} (D_x^\alpha \varphi(x)) \hat{(\xi)} \\ & &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} (\sigma(\xi) \hat{\varphi}(\xi)) \\ & &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \varphi(x) = P(\alpha, D_x) \varphi(x).\end{aligned}$$

1.4.2 缓增广义函数及其傅里叶变换

(定义) 缓增广义函数

\mathcal{S} 的连续线性泛函称为缓增广义函数, 记为 \mathcal{S}' .

这里 $u \in \mathcal{S}'$ 的连续性可以理解为: 若 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{S} 中), 则 $u(\varphi_j) \rightarrow 0$. 它的必要充分条件是: 存在非负整数 k, m 以及常数 $c_{k,m} \geq 0$ 使对一切 $\varphi \in \mathcal{S}$ 有

$$|u(\varphi)| \leq c_{k,m} \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq m} \sup_{\mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi|. \quad (18)$$

我们实际上有包含关系, 首先在集合层面有

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$$

然而还不止于此. 例如设 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{D} 中), 则一切 φ_j 有共同紧支集, 在其外一切 $\varphi_j \equiv 0$. 而且对任意 β , $\partial_x^\beta \varphi_j$ 在 \mathbf{R}^n 上一致趋于 0. 再给任意 α , 也易见 $x^\alpha \partial_x^\beta \varphi_j$ 在 \mathbf{R}^n 上一致趋于 0. 这就是说 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{S} 中). 所以对 $\varphi_j \in \mathcal{D}$, 不但有 $\varphi_j \in \mathcal{S}$, 而且给出了一个连续的嵌入算子 $l: l\varphi_j = \varphi_j$, 但左方的 φ_j 认为是 \mathcal{D} 中之元, 右方的 φ_j 认为是 \mathcal{S} 中之元. 当左方的 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{D} 中) 时, $l\varphi_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{S} 中), 所以说嵌入算子 $l: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ 是连续的. 同样可以证明嵌入算子 $l: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ 也是连续的. 于是把上述包含关系和嵌入算子的连续性综合在一起, 记作

于是我们实际上有

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}.$$

现在来看广义函数. 显然 \mathcal{E}' 之一切元都是 \mathcal{S}' 之元, \mathcal{S}' 之一切元都是 \mathcal{D}' 之元, 这是(19)式的直接推论. 例如设 $u \in \mathcal{S}'$, $\varphi_j \in \mathcal{D}$, 则因 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, 所以 $\varphi_j \in \mathcal{S}$, 而 $u(\varphi_j)$ 有意义且是线性泛函. 若 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{D} 中), 则由(19)式也有 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{S} 中), 从而 $u(\varphi_j) \rightarrow 0$. 这就是说 u 作为 \mathcal{D} 上的线性泛函也是连续的, 所以 $u \in \mathcal{D}'$. 亦即 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. 同理 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$. 此外, 若 $u_j \in \mathcal{S}'$ 而且 $u_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{S}' 中), 则对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$, $u_j(\varphi) \rightarrow 0$. 但因 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, 所以对任意 $\varphi \in \mathcal{D}$ 也有 $u_j(\varphi) \rightarrow 0$, 即是 $u_j \rightarrow 0$ (于 \mathcal{D}' 中). 这就是说, 嵌入映射 $l: \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ 也是连续的. 用这样的方法我们证明了:

(定理) Thm

我们有嵌入

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

于是我们之前关于 \mathcal{D}' 中元素得到的性质都可以运用在 \mathcal{S}' . 但是乘子运算是不同的, 前面说过, 对于任意的 $a(x) \in C^\infty$ 都是 \mathcal{D}' 乘子, 所以对于 $u \in \mathcal{S}'$, au 仍然是有意义的, 但是一般来说只能保证 $au \in \mathcal{D}'$ 而不能保证在 \mathcal{S}' 中. 所以此时我们需要定义 \mathcal{S}' 乘子.

(定义) \mathcal{S}' 乘子

令 $a(x) \in C^\infty$ 使得对于任意重指标 α , 存在 $c(\alpha) > 0$ 和整数 $N(\alpha)$ 使得

$$|D^\alpha a(x)| \leq c(\alpha)(1 + |x|^2)^{N(\alpha)}$$

则对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$, 仍然有 $a\varphi \in \mathcal{S}$, 所以用

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

来定义 au , 可以保证 $au \in \mathcal{S}'$, 称这种 a 为**缓增函数**, 所有缓增函数的集合记为 \mathcal{O}_M .

⚠ 注意:

缓增函数的充分必要条件为:

集记作 \mathcal{O}_M . 可以证明, 只有 \mathcal{O}_M 之元才能是 \mathcal{S}' 乘子. 不但如此, 我们还可以证明, $u \in \mathcal{S}'$ 的充分必要条件就是它可以写为 $u = \partial^\alpha [(1 + |x|^2)^{m/2} f(x)]$, $f(x)$ 是有界连续函数. 所以在一定意义上可以说 u 本身也是“缓增”的. 缓增广义函数的名称来源就在于此. 所以例如 $e^{|x|^2}$ 就不可能是 \mathcal{S}' 广义函数. 这

证明我们就默认他.

下面来讨论 \mathcal{S}' 的傅里叶变换, 他是建立在 Parseval 恒等式的基础上的, 即对于 $f, g_j \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\langle \widehat{f}, \varphi_j \rangle = \langle f, \widehat{\varphi_j} \rangle$$

现在如果 $f \in \mathcal{S}'$, 则上式左方没有意义, 但是右方是有意义的, 因为傅里叶变换 \mathcal{F} 把速降函数送到速降函数, 并且当在 \mathcal{S} 中的意义下 $\varphi_j \rightarrow 0$ 时, 我们知道 $\widehat{\varphi_j} \rightarrow 0$, 于是自然有 $\langle \widehat{f}, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$, 所以 \widehat{f} 是连续线性泛函.

(定义) 广义函数的傅里叶变换

若 $f \in \mathcal{S}'$, 则对于 $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, 我们定义 f 的傅里叶变换为

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle := \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$$

📌 笔记:

我们来证明 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ 是一个连续线性映射:

线性是因为:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(aT_1 + bT_2), \varphi \rangle &= \langle aT_1 + bT_2, \widehat{\varphi} \rangle && \text{(根据 } \mathcal{F} \text{ 在 } \mathcal{S}' \text{ 上的定义)} \\
&= a\langle T_1, \widehat{\varphi} \rangle + b\langle T_2, \widehat{\varphi} \rangle && \text{(因为 } T_1, T_2 \text{ 本身是线性泛函)} \\
&= a\langle \mathcal{F}(T_1), \varphi \rangle + b\langle \mathcal{F}(T_2), \varphi \rangle && \text{(再次使用 } \mathcal{F} \text{ 在 } \mathcal{S}' \text{ 上的定义)} \\
&= \langle a\mathcal{F}(T_1) + b\mathcal{F}(T_2), \varphi \rangle && \text{(根据广义函数的加法和数乘定义)}
\end{aligned}$$

连续性是因为任意给定 $T_k \rightarrow T$ 弱*收敛, 则我们知道

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$


于是对于任意的 $\varphi \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(T_k), \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle$$

所以我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(T_k) = \mathcal{F}(T)$$

所以连续性得证.

 **例子:** $\mathcal{L}^p (1 \leq p \leq \infty)$ 可以嵌入 \mathcal{S}'

设 $f \in \mathcal{L}^p (\infty > p > 1)$, 则对于 $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, 我们有

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int |f(x)\varphi(x)|dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{L}^q}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 我们早在先前就已经说明了 $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^q$. 所以自然有 $f \in \mathcal{S}'$.

当 $p = \infty$ 时, 则有

$$\begin{aligned}
|\langle f, \varphi(x) \rangle| &= \left| \int f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \text{ess sup } |f| \int |\varphi(x)|dx \\
&\leq \text{ess sup } |f| \sup_{\mathbf{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^n \varphi(x) \right| \int \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n}.
\end{aligned}$$

当 $p = 1$ 的情况. 利用勒贝格控制收敛定理即可证明 $L^1 \subset \mathcal{S}'$. 总之, $f \in L^p$ 时, 按 $\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$ 定义了一个 \mathcal{S}' 广义函数. 所以 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 函数都是 \mathcal{S}' 广义函数.

我们记傅里叶变换为 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$, 我们可以说明

(定理) \mathcal{S}' 中广义函数的傅里叶变化是线性同构

\mathcal{S}' 中广义函数的傅里叶变化是线性同构.

证明:

我们只需要证明 \mathcal{F}^{-1} 的存在, 对于任意的 $g \in \mathcal{S}'$, 存在 $f \in \mathcal{S}'$ 使得 $\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}$. 由于 $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 是线性同构(我们在前面已经证明了傅里叶逆变换公式), 我们定义

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \widehat{\varphi} \rangle$$

于是我们知道

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \widetilde{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$$

⚠ 注意:

实际上构造的过程是:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}f, \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$$

(性质) 缓增广义函数傅里叶变换的微分

对于 $f \in \mathcal{S}'$, 我们有

$$\widehat{D_x^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

证明:

首先对于任意的 $\varphi \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\langle \widehat{D_x^\alpha f}, \varphi \rangle = \langle D_x^\alpha f, \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D_x^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, (-D_x)^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \widehat{x^\alpha \varphi(x)} \rangle = \langle \widehat{f}, x^\alpha \varphi(x) \rangle = \langle x^\alpha \widehat{f}, \varphi(x) \rangle$$

于是第一个式子成立, 对于第二个式子, 我们有

$$\langle \widehat{x^\alpha f}, \varphi \rangle = \langle x^\alpha f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, x^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \widehat{D_\xi^\alpha \varphi} \rangle = \langle \widehat{f}, D_\xi^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \widehat{f}, (-D_\xi)^\alpha \varphi \rangle = \langle (-D_\xi)^\alpha \widehat{f}, \varphi \rangle$$

所以我们知道第二个式子成立.

⚠ 注意:

这两个性质的证明完美地体现了对偶思想。我们在 \mathcal{S}' 上证明一个性质, 通过定义把运算转移到测试函数上, 最终归结为在 \mathcal{S} 上证明其“对偶”的性质。

- 证明“导数变乘法” $\widehat{Df} = \xi \widehat{f}$, 需要用到“乘法变导数” $\widehat{x\varphi} = -D\widehat{\varphi}$ 。
- 证明“乘法变导数” $\widehat{x^\alpha f} = -D\widehat{f}$, 需要用到“导数变乘法” $\widehat{D\varphi} = \xi \widehat{\varphi}$ 。

正在施工:

$S'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换
 与卷积.

对 $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $g \in S(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow (f * g)(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle$

$\Delta \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$

注: 实际上有 $f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$g \in S(\mathbb{R}^n)$

$f * g \in$ 缓增 C^∞ 函数 $\subset S'(\mathbb{R}^n)$

即 $S'(\mathbb{R}^n)$ 的乘积空间

$\Rightarrow \widehat{f * g}$ 又 Fourier 变换, $\in S'(\mathbb{R}^n)$

RHS $\widehat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{g} \in S(\mathbb{R}^n) \subset$ 缓增 C^∞

视为乘积 $\rightarrow \widehat{f} \cdot \widehat{g} \in S'(\mathbb{R}^n)$

①

(定理) 物理学家们的歪打正着

若 $g \in \mathcal{O}' \subset \mathcal{S}'$, 则 $\widehat{g}(\xi) = \langle g, e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x \in \mathcal{O}_M$.

证明:

证 因 $g \in \mathcal{E}'$, 则 $g * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 这里 φ_ε 是磨光核, 且 $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$ (于 \mathcal{E}' 中) (当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时). 从而由 $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}'$ 知 $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$ (于 \mathcal{S}' 中), 于是 $F(g * \varphi_\varepsilon) \rightarrow F(g)$ (于 \mathcal{S}' 中), 而

$$F(g * \varphi_\varepsilon)(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} (g * \varphi_\varepsilon)(x) dx,$$

且 $\text{supp}(g * \varphi_\varepsilon) \subset \text{supp}g + \text{supp}\varphi_\varepsilon \subset \text{supp}g + B_1$ (取 $\varepsilon < 1$). 由引理 3.1.4, 则有

$$\begin{aligned} F(g * \varphi_\varepsilon)(\xi) &= \int \langle g(y), \varphi_\varepsilon(x - y) \rangle e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \langle g(y), \int \varphi_\varepsilon(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx \rangle. \end{aligned}$$

当 ξ 在任意一紧集 K 上时, 由定理 2.2.4 知 $\int \varphi_\varepsilon(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx \rightarrow e^{-iy \cdot \xi}$ 于 $\mathcal{D}(\mathbf{R}_y^n)$ 中 (关于 ξ 一致地), 这便得到, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时

$$F(g * \varphi_\varepsilon)(\xi) \rightarrow \langle g(y), e^{-iy \cdot \xi} \rangle_y$$

关于 $\xi \in K$ 一致地成立. 于是

$$F(g)(\xi) = \langle g(y), e^{-iy \cdot \xi} \rangle_y.$$

所以, 再由引理 3.1.2 便知 $\hat{g}(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, 并且, 对任一重指标 α , 有

$$D^\alpha \hat{g}(\xi) = \langle g(y), (-y)^\alpha e^{-iy \cdot \xi} \rangle_y.$$

由 $g \in \mathcal{E}'$, 应用第二章 §5 估计式(49), 于是可得: 存在常数 c , 整数 $m \geq 0$ 以及紧集 K , 有

$$\begin{aligned} |D^\alpha \hat{g}(\xi)| &\leq c \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{y \in K} |\partial_y^\beta (-y)^\alpha e^{-iy \cdot \xi}| \\ &\leq c \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{y \in K} \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} c' |(-y)^{\alpha - \beta_1} (-\xi)^{\beta_2} e^{-iy \cdot \xi}| \end{aligned}$$

$$\leq c(K, m, \alpha) \sum_{|\beta| \leq m} (1 + |\xi|)^{|\beta|} \leq c(g, \alpha) (1 + |\xi|)^m.$$

此即表明 $\hat{g}(\xi)$ 满足(21)式, 所以它是一个缓增函数.

 例子: 常见傅里叶变换

例 1. $\delta \in \mathcal{D}'$, 因此由上面的定理

$$\hat{\delta}(\xi) = \langle \delta(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle = 1.$$

也因此, $F^{-1}(1) = \delta(x)$, 这就是许多物理书中的公式

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} d\xi = \delta(x)$$

的含义.

例 2. $1 \in \mathcal{S}'$, 这是显然的, 所以由定义

$$\begin{aligned} \langle \hat{1}, \varphi \rangle &= \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{i0 \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

因此

$$\hat{1} = (2\pi)^n \delta(x).$$